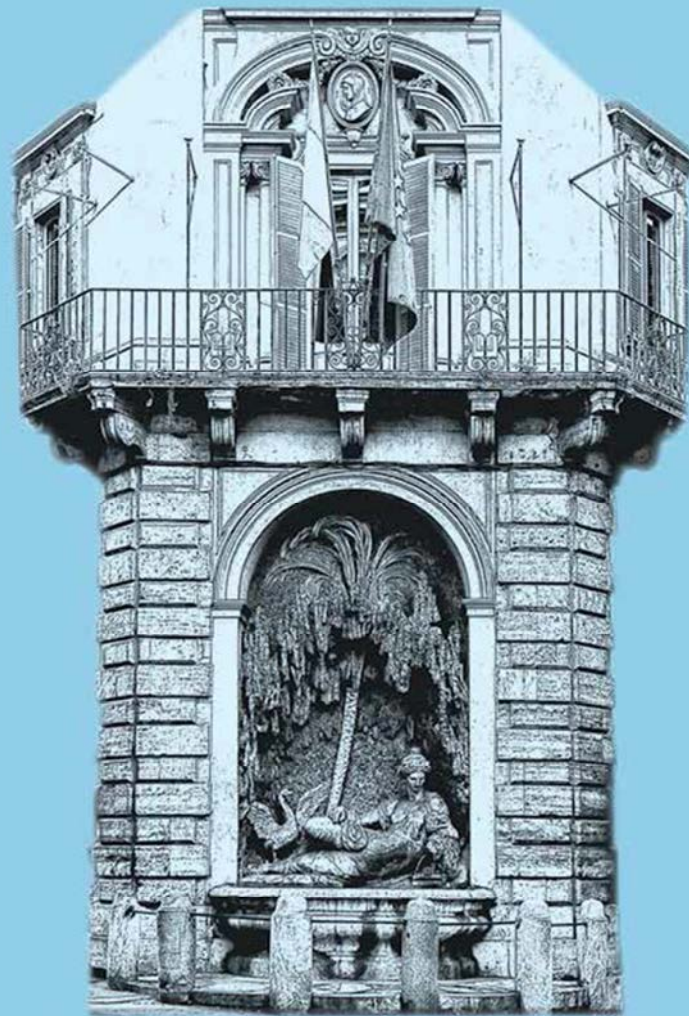


Quaderno n. 9

Modello overdispersed Poisson: formula chiusa per la stima GLM della volatilità one year della riserva sinistri.

Stefano Cavastracci, Agostino Tripodi



Giugno 2017

(decreto legge 6 luglio 2012 n. 95 convertito con legge 7 agosto 2012 n. 135)

La serie Quaderni intende promuovere la diffusione di studi e contributi originali sui temi assicurativi al fine di suscitare commenti critici e suggerimenti.

Le opinioni espresse nei lavori sono attribuibili solo agli autori e non impegnano in alcun modo la responsabilità dell'Istituto.

via del Quirinale 21 – 00187 ROMA
telefono +39 06 42133.1

Tutti i diritti riservati.

È consentita la riproduzione a fini didattici e non commerciali,
a condizione che venga citata la fonte

La serie è disponibile online nel sito www.ivass.it

ISSN 2421-4671 (online)

Modello *overdispersed Poisson*: formula chiusa per la stima GLM della volatilità *one year* della riserva sinistri.

Stefano Cavastracci, Agostino Tripodi

Abstract

L'obiettivo del presente quaderno è quello di pervenire ad una formula chiusa per la stima della volatilità *one year* del *run off* della riserva sinistri, calcolata mediante i modelli lineari generalizzati ed in particolare il modello *overdispersed Poisson*. Allo stato dell'arte, tale volatilità *one year* è calcolata mediante la nota metodologia *bootstrap*, che richiede l'impiego del metodo *Monte Carlo* con tecnica di *re-reserving*. Tale metodo risulta tuttavia molto oneroso dal punto vista computazionale, pertanto spesso nella pratica si ricorre a tecniche di approssimazione basate sulle relazioni tra la volatilità *one year* ottenuta con il metodo di Merz-Wüthrich e la volatilità *ultimate* ottenuta con il metodo di Mack (*emergence pattern*). Il quaderno costituisce inoltre una guida all'utilizzo dei metodi GLM, attraverso la presentazione di numerosi esempi aventi in comune il medesimo triangolo di *run off* di input.

Nella sezione 1 viene fornita una panoramica sull'utilizzo dei modelli lineari generalizzati per la valutazione della riserva sinistri ed in generale le tematiche connesse a quest'ultima, anche con riferimento al *framework* Solvency 2. Nella sezione 2 al fine di illustrare al lettore la notazione utilizzata nel seguito viene presentata l'organizzazione dei dati nel c.d. triangolo di *run off*, vengono forniti brevi cenni del diffuso metodo *chain ladder* e viene introdotto il concetto di *claims development result*. Nella sezione 3 è illustrato il modello GLM per la stima della riserva sinistri. Nella sezione 4 è descritta la relazione per stimare la volatilità *ultimate* con il metodo GLM. La sezione 5 è il fulcro di questo quaderno e spiega come giungere all'algoritmo che consente di stimare con formula chiusa la volatilità *one year* nel contesto GLM. Infine nella sezione 6 viene presentato un caso pratico, utilizzando il triangolo di *run off*, edulcorato, di una compagnia di assicurazioni italiana.

Classificazione JEL: C13, G22, M40

Parole chiave: riserva sinistri, errore di previsione, CDR, one year view, GLM.

Ringraziamenti: Gli autori desiderano ringraziare Milena Nocente per la pregevole revisione effettuata, Francesca Gagni e Raffaella Marchese per i preziosi consigli. Si ringrazia Riccardo Cesari per la disponibilità e per gli stimoli forniti. Gli autori sono gli unici responsabili di quanto contenuto nel presente lavoro.

Indice

1	Introduzione	3
2	La valutazione delle riserve sinistri	7
2.1	L'organizzazione dei dati	7
2.2	Cenni sul metodo chain ladder	8
2.3	Il <i>claims development result</i>	10
3	Modelli lineari generalizzati (GLM) per la stima della riserva sinistri	11
3.1	Struttura dei modelli GLM	11
3.2	Modelli semi-parametrici	14
3.3	Elementi per la bontà di adattamento ai dati osservati	16
4	Il Mean Square Error of Prediction della riserva sinistri	18
4.1	Il caso generale	18
4.2	Impostazione nei GLM	18
5	Volatilità one-year per il Claims Development Results	26
5.1	Stima per il totale delle generazioni	26
5.2	Stima per le singole generazioni	34
6	Applicazione numerica	39
7	Conclusioni	42

1 Introduzione

Una decina di anni fa, in Italia, si è cominciato a diffondere, sia nel mondo accademico sia nel mercato assicurativo, l'utilizzo dei modelli lineari generalizzati (*generalized linear model*, GLM) per la valutazione della riserva sinistri; al riguardo, proprio nel 2006, fu organizzato un eccellente corso specialistico dalla società *Concentric*, presso la borsa di Milano, tenuto da Richard Verrall della Cass Business School di Londra, uno dei maggiori artefici di tale applicazione. Uno dei limiti, in relazione alla capacità di recepire tali modelli nella pratica attuariale italiana, era rappresentato dalla necessità d'incorporare le informazioni sul numero dei sinistri in questo tipo di valutazione come si faceva da anni con le metodologie deterministiche¹ (es. Fisher Lange).

All'epoca (2006) il framework applicativo dei GLM in tale contesto di riservazione era stato definito in maniera pressochè esaustiva e probabilmente la guida più completa per tale applicazione in lingua italiana è Gigante e Sigalotti (7). Ad oggi, piuttosto che un ampliamento della flessibilità insita in tali modelli ai fini di migliorarne la capacità previsiva, si può riscontrare un generale sviluppo di modelli derivati caratterizzati il più delle volte da un diverso *background* teorico, rappresentato in una serie di *paper* pubblicati negli ultimi anni. Questi modelli che hanno cercato di superare i limiti stessi dei GLM, possono essere classificati in quattro categorie:

- (a) i GLM allargati a famiglie diverse dalla classe esponenziale (GLZ) di Venter (22);
- (b) i GLMM (*generalized linear mixed model*) di Antonio e Berlaint (1) che consentono di superare l'ipotesi di indipendenza tra i pagamenti dei sinistri della stessa generazione avvenuti in esercizi diversi (trattati con tecniche di simulazione stocastica);
- (c) i GLM con effetti smoothing di Bjorkwall e Verrall (2);
- (d) l'applicazione dei GEE (*generalized estimating equations*) di Pesta e Hudecova (16) in cui l'ipotesi di correlazione tra i pagamenti della stessa generazione è costruita in formula chiusa.

¹In Taylor e Xu(21) è stato recentemente proposto un modello che utilizza il modello GLM integrato con simulazioni effettuate attraverso tecniche di *bootstrapping*.

Allo stato dell'arte, tuttavia, la loro diffusione è rimasta relegata in ambito accademico per diversi motivi. I GLZ migliorano più che altro il *fitting* dei dati storici; i GLMM, basati su un modello di regressione semiparametrica, sono troppo sofisticati per essere elaborati in contesti professionali; i GLM con effetti *smoothing* presentano sempre il rischio di distorcere l'informazione contenuta nei dati aziendali; i GEE sono forse tra i più interessanti tuttavia gli studiosi che se ne sono occupati non hanno formulato né una corretta teoria delle stime di correlazione iniziali da dare in input all'algoritmo di ottimizzazione dei parametri, fortemente dipendenti da esse, né una completa definizione delle formule dell'errore di previsione.

Tornando ai GLM è comunque opportuno segnalare che la Casualty Actuarial Society ha pubblicato nel 2016 una corposa monografia (20) su tali modelli, focalizzata sulla diagnostica e sulle modifiche delle strutture di regressione. Questo lavoro invece è finalizzato alla derivazione della volatilità in formula chiusa nell'orizzonte temporale di un anno di un particolare GLM con distribuzione *Over Dispersed Poisson* (ODP). Tale volatilità è di particolare interesse per il calcolo del requisito di capitale per il rischio di riservazione (*reserve risk capital*) dei modelli interni, fino ad oggi calcolata con tecniche simulative quali il *bootstrap* applicato in due fasi (cosiddetto *re-reserving*). Gli autori sono stati ispirati dalla monografia di Merz e Wuthrich (13) in cui la stima della volatilità, per il complesso delle generazioni, viene ricavata nel modello ODP a classificazione incrociata sfruttando la teoria fisica di propagazione dell'errore. Tale risultato è stato adattato al modello GLM ottenendo così una formula della volatilità ad un anno sia per le singole generazioni di sinistri sia per il complesso delle generazioni. Le dimostrazioni di cui si è detto verranno precedute da una descrizione dell'applicazione dei GLM al problema del *loss reserving* corredata da utili esempi numerici.

In generale, gli impegni di risarcimento per i sinistri non ancora pagati alla chiusura dell'esercizio comportano l'accantonamento della riserva sinistri. La natura di stima di tale posta di bilancio costituisce una primaria fonte di rischio per le imprese di assicurazione contro i danni a causa dei problemi che può comportare una sua potenziale sottovalutazione. Ai fini di una congrua quantificazione, le metodologie

attuariali sono da tempo parte integrante dello specifico processo di valutazione, spesso anche a causa della inadeguatezza della procedura di inventario (valutazione di ogni fascicolo di sinistro), adottata dalle compagnie ai fini della rappresentazione a costo ultimo dei sinistri per i rami a lenta liquidazione (*long tail*). Le metodologie stocastiche, a fronte di una minore maneggevolezza operativa, hanno, rispetto ai metodi tradizionali, il vantaggio di essere basate su ipotesi statistiche esplicite e coerenti, di ridurre al minimo gli aggiustamenti *ad hoc*, le valutazioni discrezionali e di fornire, in aggiunta alla stima puntuale della riserva (*best estimate*), intervalli di confidenza della stessa secondo prefissati livelli di probabilità. In particolare mediante le suddette metodologie è sempre possibile pervenire ad una stima dei momenti di primo ordine (media) e di secondo ordine (varianza) della distribuzione di probabilità della riserva. Naturalmente potrà essere ricavata anche la distribuzione di probabilità completa, con metodi analitici se si adottano opportune ipotesi aggiuntive, oppure tramite tecniche di simulazione.

L'impiego di metodologie stocastiche si è consolidato, a seguito del progetto Solvency II, con il raggiungimento di un obiettivo armonizzato in chiave probabilistica (*best estimate* più *risk margin*) quale requisito regolamentare per la valutazione della riserva sinistri e del *reserve risk capital*. Infatti in tale contesto una precisa definizione di *best estimate*, *risk margin* e *reserve risk capital* può essere fornita solamente mediante l'applicazione di un modello stocastico di valutazione alle serie storiche dei sinistri. Il *risk margin* è inteso come margine addizionale volto ad esplicitare quantitativamente la remunerazione del capitale di rischio in funzione del livello di incertezza dei *cash flow* futuri.

Nelle valutazioni stocastiche, a parte l'incertezza di tipo finanziario legata al rendimento degli investimenti e agli aspetti legati al differimento delle liquidazioni, si deve tenere conto di tre tipi di rischio: rischio di modello, rischio di stima e rischio di processo. Il rischio di modello riguarda il rischio che venga usato un modello non adeguato per rappresentare il fenomeno; il rischio di parametro o rischio di stima è legato alla variabilità dello stimatore utilizzato per inferire sui parametri del modello; il rischio di processo riguarda invece la variabilità del fenomeno oggetto di analisi.

Per favorire il raccordo con la prassi precedente molti dei metodi stocastici per le riserve sono stati costruiti estendendo le tradizionali tecniche deterministiche, in particolare la nota metodologia *chain*

ladder basata sullo sviluppo dei pagamenti cumulati. Ciò posto, è necessario sottolineare che alcuni dei metodi stocastici più diffusi (Mack e ODP) consentono di effettuare solo valutazioni automatiche delle riserve² e sono validi soltanto quando sono soddisfatte le ipotesi di base del *chain ladder*. Questo limite è tuttavia meno importante nella determinazione del requisito di capitale in quanto funzione di una misura di volatilità. In questo lavoro, per la valutazione dei flussi di cassa per i pagamenti futuri per sinistri già accaduti e per ottenere stime dei vari tipi di rischio che devono essere considerati nella valutazione del margine per il rischio, si considerano le evoluzioni dei modelli stocastici che rientrano nella classe dei modelli lineari generalizzati. Come è noto, tali modelli consentono l'utilizzo di diverse distribuzioni per le variabili risposta e per le variabili esplicative, le quali si ritiene abbiano un legame con la variabile di risposta. Dunque diversi metodi tradizionali per la valutazione della riserva sinistri possono essere rivisti in questa direzione; come detto, le stime delle riserve prodotte da particolari modelli lineari generalizzati coincidono infatti con quelle ottenibili mediante metodi deterministici di stima della riserva sinistri, come ad esempio i metodi *chain ladder* e di separazione. Alcuni lavori sull'applicazione dei modelli lineari generalizzati per la valutazione della riserva sinistri sono riportati in bibliografia (3), (4), (5), (7), (17), (19). In generale, per limitare il rischio di modello si deve considerare, ad un primo livello, un'ampia classe di modelli ed individuare il modello che meglio si accosta ai dati, secondo una opportuna misura di bontà di adattamento. Nell'ambito di riferimento, come misura dell'accostamento ai dati per il confronto tra modelli, viene valutata la funzione di log-verosimiglianza nel caso di distribuzioni appartenenti alla famiglia esponenziale delle variabili aleatorie (es. distribuzione gamma) e la funzione di quasi-verosimiglianza estesa, introdotta in Nelder e Pregibon (14), nel caso semiparametrico in cui viene specificata solo la relazione tra la varianza e la speranza matematica delle variabili risposta. Ad un secondo livello, scelto il modello, l'accostamento ai dati viene realizzato modificando la struttura di regressione, ad esempio aggiungendo una particolare variabile esplicativa per segnalare un *outlier* avendo come target un valore ottimale della funzione di devianza scalata (rapportata ai gradi di libertà).

²il *Claim reserving working party* degli attuari inglesi del 2002 ha individuato ben 26 fattori di cui tener conto nelle valutazioni della riserva sinistri.

2 La valutazione delle riserve sinistri

Nelle assicurazioni danni, per valutare alla chiusura dell'anno di bilancio gli accantonamenti per sinistri ancora da liquidare, generati da un portafoglio di rischi assicurati, si fa riferimento in generale al triangolo dei risarcimenti storici, aggiornati alla data di valutazione. In particolare, si assume che le osservazioni relative ai pagamenti effettuati siano riferite a sinistri avvenuti in un limitato periodo precedente e, pertanto, in questo schema risultano disponibili gli importi pagati degli antecedenti anni di avvenimento o generazioni di sinistro. Per ciascuna generazione di accadimento (*accident year*) si suddividono i dati per anno di pagamento (*development year*), variabile che misura l'antidurata di pagamento del sinistro.

2.1 L'organizzazione dei dati

Sia Y_{ij} l'importo pagato con j anni di ritardo per sinistri accaduti l'anno i – *esimo*, solitamente detto pagato incrementale. Tali pagamenti vengono rappresentati nel c.d. triangolo di *run-off* (cfr tab.1).

i / j	0	1	...	j	...	J
1	Y_{10}	Y_{11}	...	Y_{1j}	...	Y_{1J}
2	Y_{20}	Y_{21}	...			
⋮	⋮					
i	Y_{i0}			Y_{ij}		
⋮	⋮					
l	Y_{l0}					

Tabella 1: Triangolo di run-off dei pagati incrementali

Si definisce invece con $C_{ij} = \sum_{k=0}^j Y_{ik}$ il pagato cumulato, ovvero l'importo totalmente pagato per la generazione i entro i primi j anni di sviluppo, vale naturalmente la relazione ricorsiva $C_{ij} = C_{i,j-1} + Y_{ij}$ con $j > 0$. Il rapporto $F_{i,j-1} = C_{ij}/C_{i,j-1}$, che prende il nome di *link ratio*, è il fattore che collega il pagato cumulato tra due antidurate adiacenti, la $j-1$ e la j , per una stessa generazione di accadimento i . Posto che il processo liquidativo di ogni generazione si conclude con certezza entro J anni, il costo

complessivo della generazione i è $C_{i,J} = \sum_{k=0}^J Y_{ik}$; è conveniente riscrivere il costo complessivo nella somma di due addendi:

$$C_{i,J}^{(t)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{t-i} Y_{ik}}_{\text{deterministico in } t} + \underbrace{\sum_{k=t-i+1}^J Y_{ik}}_{\text{aleatorio in } t} \quad (2.1)$$

in quanto nell'anno di bilancio t il primo addendo è noto con certezza, mentre il secondo è affetto da aleatorietà. Dunque la riserva sinistri per la generazione i all'anno di bilancio t , riguarda la componente aleatoria di $C_{i,J}^{(t)}$, ovvero si ha $R_i^{(t)} = \sum_{k=t-i+1}^J Y_{ik} = C_{t-j,J}^{(t)} - C_{t-j,j}$.

Si indicherà invece con $\hat{R}_i^{(t)} = \sum_{k=t-i+1}^J \hat{Y}_{ik}$ la stima della riserva sinistri fatta al tempo t e con $\hat{R}^{(t)} = \sum_{i+j>t} \hat{Y}_{ij}$ la riserva complessiva per tutte le generazioni. Nel prosieguo si utilizzerà t per far riferimento alla data corrente di valutazione.

2.2 Cenni sul metodo chain ladder

L'idea alla base del metodo *chain ladder* è che i pagati cumulati di due antidurate adiacenti siano tra di loro proporzionali, a meno di una componente erratica ϵ_{ij} a media nulla:

$$C_{i,j+1}^{(t)} = C_{i,j} f_j^{(t)} + \epsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, I - j - 1 \quad (2.2)$$

dalla (2.2) emerge che il modello *chain ladder*, per ogni antidurata j , coincide con un modello di regressione lineare passante per l'origine. Se si ipotizza che la varianza degli errori sia $Var(\epsilon_{ij}) = \sigma^2 C_{i,j}$, la soluzione dei minimi quadrati per la stima di $f_j^{(t)}$ è

$$\hat{f}_j^{(t)} = \frac{\sum_{k=1}^{t-j-1} C_{k,j+1}}{\sum_{k=1}^{t-j-1} C_{k,j}} = \frac{\sum_{k=1}^{t-j-1} C_{k,j} F_{k,j}}{\sum_{k=1}^{t-j-1} C_{k,j}} \quad j = 0, 1, \dots, J - 1 \quad (2.3)$$

che equivale alla media ponderata dei *link ratio* individuali osservati sulla medesima antidurata j . Tale approccio implica che i pagamenti cumulati $C_{i_1,j}$ e $C_{i_2,j}$ per $i_1 \neq i_2$, siano tra di loro indipendenti; i *link*

ratio individuali $F_{i,j}$, oltre ad essere indipendenti rispetto alla generazione i , devono possedere uguali anche i primi due momenti (per j fissato), dunque si richiede che il processo di liquidazione dei sinistri non abbia subito cambiamenti strutturali nel tempo.

La stima del costo ultimo $\hat{C}_{i,J}^{(t)}$ si ottiene mediante l'impiego dei fattori $\hat{f}_j^{(t)}$:

$$\hat{C}_{i,J}^{(t)} = C_{i,t-i} \prod_{j=t-i}^{J-1} \hat{f}_j^{(t)} \quad (2.4)$$

e quindi la stima della riserva sinistri è:

$$\hat{R}_i^{(t)} = \hat{C}_{i,J}^{(t)} - C_{i,t-i} \quad (2.5)$$

Esempio 1 Chain ladder

In questo esempio si illustra il calcolo della riserva sinistri, stimata al tempo $t = 4$, con il metodo *chain ladder* utilizzando i pagamenti cumulati della tabella 3. Per quanto riguarda i *link ratio* si ha:

$$\begin{aligned} \hat{f}_0^{(4)} &= \frac{C_{1,1}+C_{2,1}+C_{3,1}}{C_{1,0}+C_{2,0}+C_{3,0}} = \frac{130+250+315}{30+50+65} = 4.7931 \\ \hat{f}_1^{(4)} &= \frac{C_{1,2}+C_{2,2}}{C_{1,1}+C_{2,1}} = \frac{220+370}{130+250} = 1.5526 \\ \hat{f}_2^{(4)} &= \frac{C_{1,3}}{C_{1,2}} = \frac{265}{220} = 1.2045 \end{aligned}$$

quindi, in accordo con la (2.4), per la stima del costo ultimo si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{2,3}^{(4)} &= 370 \times 1.2045 = 445.66 \\ \hat{C}_{3,3}^{(4)} &= 315 \times 1.5526 \times 1.2045 = 589.08 \\ \hat{C}_{4,3}^{(4)} &= 75 \times 4.7931 \times 1.5526 \times 1.2045 = 672.27 \end{aligned}$$

mentre, sulla base della (2.5), la stima della riserva sinistri è:

$$\begin{aligned} \hat{R}_2^{(4)} &= \hat{C}_{2,3}^{(4)} - C_{2,2} = 445.66 - 370 = 75.66 \\ \hat{R}_3^{(4)} &= \hat{C}_{3,3}^{(4)} - C_{3,1} = 589.08 - 315 = 274.08 \\ \hat{R}_4^{(4)} &= \hat{C}_{4,3}^{(4)} - C_{4,0} = 672.27 - 75 = 597.27 \end{aligned}$$

i / j	0	1	2	3
1	30	100	90	45
2	50	200	120	
3	65	250		
4	75			

Tabella 2: Esempio di pagamenti incrementali Y_{ij}

i / j	0	1	2	3
1	30	130	220	265
2	50	250	370	
3	65	315		
4	75			

Tabella 3: Esempio di pagamenti cumulati C_{ij}

2.3 Il claims development result

Il *claims development result* (CDR) è il risultato tecnico relativo all'evoluzione del processo di liquidazione dei sinistri. In altre parole misura se la riserva sinistri $R_i^{(t)}$, accantonata al generico anno di bilancio t , per la generazione i , è risultata sufficiente a pagare i sinistri $Y_{i,t-i+1}$, tra t e $t + 1$ ed ad accantonare la nuova riserva $R_i^{(t+1)}$ in $t + 1$, formalmente:

$$CDR_{i,t+1} = R_i^{(t)} - \left(Y_{i,t-i+1} + R_i^{(t+1)} \right) = C_{i,J}^{(t)} - C_{i,J}^{(t+1)}, \quad (2.6)$$

è una variabile aleatoria se l'istante di osservazione è t , mentre è un valore deterministico se si osserva in $t + 1$. Nell'ambito della valutazione del rischio e del calcolo del capitale di solvibilità si è interessati all'osservazione in t (variabile aleatoria), mentre nell'ambito delle analisi di bilancio si analizza l'aspetto deterministico osservato in $t + 1$. In particolare si ha una perdita se $CDR_{i,t+1} < 0$ ed un guadagno in caso di risultato positivo.

3 Modelli lineari generalizzati (GLM) per la stima della riserva sinistri

I modelli lineari generalizzati (GLM) rappresentano una classe piuttosto ampia di modelli per i quali è possibile stimare i parametri definendo e massimizzando la funzione di verosimiglianza. Posto che per quest'ultima siano rispettate le condizioni di regolarità, gli stimatori ottenuti con il metodo della massima verosimiglianza godono di diverse proprietà tra cui: consistenza, correttezza asintotica e normalità asintotica. Tali proprietà consentono di ricavare informazioni aggiuntive sui parametri ed ottenere misure sulla bontà di accostamento. Inoltre, le medesime stime delle riserve ottenute con metodi tradizionali di valutazione possono essere replicate attraverso particolari GLM.

Nel seguito, con riferimento ad un generico parametro α si utilizzerà $\hat{\alpha}$ per far riferimento alla sua stima ed il simbolo $\tilde{\alpha}$ per il corrispondente stimatore.

3.1 Struttura dei modelli GLM

Nei modelli GLM per la stima della riserva sinistri, tipicamente la variabile risposta è rappresentata dai pagati incrementali osservati Y_{ij} , mentre per le variabili esplicative sono utilizzate la generazione di accadimento e l'antidurata di pagamento. In particolare le variabili esplicative sono utilizzate come variabili qualitative (*factors*) e dunque codificate mediante l'utilizzo delle variabili *dummy*³, come chiarito nell'esempio 2. Per i modelli GLM valgono le seguenti proprietà:

- (a) le variabili Y_{ij} sono stocasticamente indipendenti;
- (b) la funzione di densità (v.a. assolutamente continue) o di probabilità (v.a. discrete) appartiene alla classe esponenziale:

³Le variabili *dummy* sono variabili binarie 0-1, dove il valore 1 indica la presenza e 0 l'assenza. Una variabile fattoriale che assume due modalità ad esempio 'Maschi' e 'Femmine' assumerà valore $x = 0$ per i maschi ed $x = 1$ per le femmine; una variabile fattoriale che assume tre modalità ad esempio 'Nord', 'Centro' e 'Sud', sarà codificata mediante due variabili binarie x_1 e x_2 e quindi per il 'Nord' (in questo esempio valore base) si ha la coppia $(x_1 = 0, x_2 = 0)$, per il 'Centro' la coppia $(x_1 = 1, x_2 = 0)$ e per il 'Sud' la coppia $(x_1 = 0, x_2 = 1)$. In generale per codificare una variabile fattoriale che può assumere n modalità si utilizzano $n - 1$ variabili *dummy*, la somma di esse dà sempre 1 ad eccezione per il valore base che assumono tutte valore 0.

$$f(y; \theta_{ij}, \phi) = \exp \left\{ \frac{\omega_{ij}}{\phi} [y\theta_{ij} - b(\theta_{ij})] \right\} c(y; \theta_{ij}, \phi) \quad (3.1)$$

dove ω_{ij} è un peso assegnato, θ_{ij} è il parametro canonico, ϕ il parametro di dispersione indipendente da i e j , $b(\cdot)$ e $c(\cdot)$ sono funzioni che identificano la particolare famiglia esponenziale;

(c) i momenti possono essere generalizzati nel seguente modo:

$$E(Y_{ij}) = g^{-1}(x_{ij}^T \beta) = b'(\theta_{ij}) \quad e \quad Var(Y_{ij}) = \frac{\phi}{\omega_{ij}} b''(\theta_{ij}) = \frac{\phi}{\omega_{ij}} V(\mu_{ij}), \quad (3.2)$$

dove x_{ij} è il vettore colonna delle variabili esplicative, β è il vettore dei parametri e g è una funzione continua ed invertibile che viene detta la funzione di collegamento (*link function*). Nel prosieguo si indicherà con h l'inversa della funzione *link function*, cioè $h = g^{-1}$, mentre $V(\mu_{ij}) = b''(b'^{-1}(\mu_{ij}))$ è la c.d. funzione di varianza.

Nella successiva tabella 4 sono riportate per alcune distribuzioni la funzioni che caratterizzano il particolare GLM.

	Normale	Poisson	Binomiale	Gamma	Gaussiana inversa
Notazione	$N(\mu, \sigma^2)$	$P(\mu)$	$B(m, \pi)$	$G(\mu, \nu)$	$IG(\mu, \sigma^2)$
ϕ	σ^2	1	$1/m$	ν^{-1}	σ^2
$b(\theta)$	$\theta^2/2$	e^θ	$\log(1 + e^\theta)$	$-\log(-\theta)$	$-(2\theta)^{1/2}$
$c(y; \phi)$	$-\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{\phi} + \log(2\pi\phi) \right)$	$-\log y!$	$\log \binom{m}{my}$	$\frac{\nu \log(\nu y) - \log y}{-\log \Gamma(\nu)}$	$-\frac{1}{2} \left(\log(2\pi\phi y^3) + \frac{1}{\phi y} \right)$
$\mu(\theta) = E(Y; \theta)$	θ	e^θ	$e^\theta / (1 + e^\theta)$	$-1/\theta$	$(-2\theta)^{-1/2}$
Canonical link: $g(\mu)$	<i>identity</i>	<i>log</i>	<i>logit</i>	<i>reciprocal</i>	$1/\mu^2$
Variance function: $V(\mu)$	1	μ	$\mu(1 - \mu)$	μ^2	μ^3

Tabella 4: Esempio (cfr. (11) pag. 30) di distribuzioni della famiglia esponenziale

Si indica con X la matrice di disegno (*design matrix*), dove la generica riga è un vettore che rappresenta le variabili esplicative per la corrispondente determinazione della variabile risposta, mentre $\eta = X\beta$ è il predittore lineare. La funzione di collegamento $g(\cdot)$ mette dunque in relazione ogni componente del predittore lineare, $\eta_{ij} = x_{ij}^T \beta$, con la speranza matematica e cioè $E(Y_{ij}) = h(\eta_{ij})$.

Per il vettore dei parametri di regressione $\beta = (c, a_1, \dots, a_I, b_0, \dots, b_J)^T$, si ha che il parametro c identifica una caratteristica comune a tutte le osservazioni (intercetta del modello), i parametri

a_1, a_2, \dots, a_I sono relativi alle generazioni di accadimento e i parametri b_0, b_1, \dots, b_J sono invece relativi all'antidurata di pagamento. Il modello così definito risulta sovrapparametrizzato e in particolare risulta definito a meno di una costante additiva. Per ovviare a tale problema si pone il vincolo $a_1 = b_0 = 0$ e infatti tali parametri non trovano collocazione nella matrice X rappresentata in tabella 5, dunque il generico parametro a_i e b_j indicano la differenza rispetto all'intercetta c .

Esempio 2 Dati di input

Per l'utilizzo dei GLM e per la definizione della *design matrix* è conveniente passare da una struttura triangolare dei dati ad una struttura vettoriale ed a titolo di esempio, si consideri il triangolo di *run-off* rappresentato in tabella 2. I dati Y_{ij} in esso contenuti vengono incolonnati, mantenendo le informazioni sulle generazioni di accadimento i e sulle antidurate di pagamento j ; quest'ultime sono considerate variabili fattoriali e codificate mediante le variabili *dummy*. Con questo procedimento i dati possono essere organizzati come in tabella 5. Per esempio, la riga 6 della *design matrix* X è $x_{21}^\top = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$, i valori diversi pari ad 1 sono tre e si ha che il primo è relativo all'intercetta, il secondo si trova in corrispondenza della colonna relativa alla generazione di accadimento $i = 2$ ed il terzo in corrispondenza dell'antidurata $j = 1$. Si osservi che nella matrice X non viene riportata nè la colonna relativa alla generazione $i = 1$ nè la colonna relativa all'antidurata $j = 0$, tali modalità sono anche dette base in quanto non differiscono dal termine di intercetta.

k	Y_{ij}	i	j	X						
				Int.	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	30	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	50	2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	65	3	0	1	0	1	0	0	0	0
4	75	4	0	1	0	0	1	0	0	0
5	100	1	1	1	0	0	0	1	0	0
6	200	2	1	1	1	0	0	1	0	0
7	250	3	1	1	0	1	0	1	0	0
8	90	1	2	1	0	0	0	0	1	0
9	120	2	2	1	1	0	0	0	1	0
10	45	1	3	1	0	0	0	0	0	1

Tabella 5: Esempio dati Y_{ij}

Nell'ambito dei modelli GLM la stima dei parametri β si ottiene con il metodo di massima verosimiglianza; tale approccio consente di calcolare le stime di massima verosimiglianza delle speranze matematiche

che sono date da $\hat{\mu}_{ij} = h(\eta_{ij})$ con $i + j > t$. La stima del parametro di dispersione⁴ ϕ , quando non è noto, può essere a sua volta ottenuta con il metodo della massima verosimiglianza oppure ricorrendo a stimatori consistenti ad esempio quello basato sullo stimatore di Pearson

$$\hat{\phi} = \frac{1}{n-p} \sum_{i+j \geq t} \omega_{ij} \frac{(y_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2}{V(\hat{\mu}_{ij})} \quad (3.3)$$

dove $n - p$ è il numero di gradi di libertà del modello (n è il numero di dati osservati e p il numero dei parametri da stimare); nel caso specifico si ha $n = \frac{l(l+1)}{2}$, $p = l + j = 2l - 1$ e quindi $n - p = \frac{l^2 - 3l + 2}{2}$.

Osservazione: la struttura di regressione può essere modificata con l'inserimento di altri parametri legati ad ulteriori variabili esplicative. La loro scelta può essere effettuata attraverso analisi preliminari sviluppate sui dati e mediante analisi inferenziali di confronto tra modelli, basate su indicatori della bontà dell'accostamento ai dati e su analisi dei residui. In particolare può essere anche inserito un nuovo parametro per considerare specifiche interazioni delle due variabili (anno di accadimento e antidurata di pagamento) e quindi in corrispondenza di particolari dati.

3.2 Modelli semi-parametrici

Come detto precedentemente, per definire la funzione di verosimiglianza è necessario specificare per la variabile risposta la forma analitica della sua distribuzione, mentre è possibile definire la funzione di quasi-verosimiglianza specificando unicamente la relazione tra media e varianza delle osservazioni, come descritto da Wedderburn⁵(24):

$$K(y; \beta, \phi) = \sum_{i+j \leq t} \omega_{ij} \int_{y_{ij}}^{\mu_{ij}} \frac{y_{ij} - s}{\phi V(s)} ds \quad (3.4)$$

⁴Una variante è rappresentata dall'utilizzo da più parametri di dispersione in funzione dell'antidurata England e Verrall(6)

⁵Robert W.M. Wedderburn(1947-1975), sarebbe divenuto uno dei più eminenti statistici del suo tempo, visti i suoi contributi iniziali, se non fosse prematuramente scomparso all'età di 28 anni per uno shock anafilattico dovuto ad una puntura di vespa.

tale relazione può essere utilizzata per la stima dei parametri β . La funzione di quasi-verosimiglianza possiede proprietà simili a quelle della verosimiglianza e dunque anche i parametri che si ottengono massimizzando la (3.4). Nel modello Poisson over-dispersed con *link-function* logaritmica, la relazione tra media e varianza è invece la seguente:

$$E(Y_{ij}) = \mu_{ij} = e^{c+a_i+b_j} \quad e \quad Var(Y_{ij}) = \phi V(\mu_{ij}) = \phi \mu_{ij}, \quad (3.5)$$

immergendo le (3.5) nella (3.4) si ottiene l'espressione della funzione di quasi-verosimiglianza per il modello Poisson over-dispersed:

$$K(y; \beta, \phi) = \sum_{i+j \leq t} \frac{\omega_{ij}}{\phi} \left[y_{ij} \log \frac{\mu_{ij}}{y_{ij}} - \mu_{ij} + y_{ij} \right] \quad (3.6)$$

la stima $\hat{\beta}$ si ottiene ricercando i valori di β che rendono massima la (3.6), come suggerito in Wedderburn (24) il problema di ottimo può essere risolto con il metodo di Gauss-Newton.

Esempio 3 Stima con il metodo GLM

Utilizzando la (3.6) con i dati della tabella 5 e ponendo $\omega_{ij} = 1$, per i parametri si ottengono le stime riportate in tabella 6. In tabella 7 è invece riportata la stima dei pagati incrementali (*fitted*) e della riserva sinistri, per esempio $Y_{10} = e^{3.3865} = 29.56$ mentre $Y_{21} = e^{3.3865+0.5199+1.3332} = 188.59$; la verifica degli altri importi è lasciata come esercizio al lettore. Si osservi che la stima della riserva sinistri ottenuta con il metodo GLM e riportata in tabella 7 coincide (a meno di approssimazioni dovute all'arrotondamento dei *link ratio* alla quarta cifra decimale) con la stima ottenuta con il metodo *chain ladder* e riportata nell'esempio 1. Utilizzando la (3.3) si ottiene la stima del parametro di dispersione $\hat{\phi} = 1.6022$.

Parametro	Stima	Std. Error
\hat{c}	3.3865	0.1324
\hat{a}_2	0.5199	0.1078
\hat{a}_3	0.7989	0.1178
\hat{a}_4	0.9310	0.1972
\hat{b}_1	1.3332	0.1182
\hat{b}_2	0.9741	0.1435
\hat{b}_3	0.4202	0.2305

Tabella 6: Stima dei parametri $\hat{\beta}$

i / j	0	1	2	3	\hat{R}_i
1	29.56	112.13	78.31	45.00	0
2	49.72	188.59	131.69	75.68	75.68
3	65.72	249.28	174.08	100.04	274.12
4	75.00	284.48	198.66	114.17	597.31

Tabella 7: Esempio: stime dei pagati incrementali \hat{Y}_{ij}

3.3 Elementi per la bontà di adattamento ai dati osservati

Un metodo spesso utilizzato per valutare la bontà di accostamento (*goodness of fitting*) del modello ai dati osservati è l'analisi dei residui di Pearson generalizzati (vedi tab. 8) attraverso i quali è possibile analizzare la presenza di dati anomali o di trend. La formula di calcolo di detti residui è:

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})/\omega_{ij}}} \quad (3.7)$$

i / j	0	1	2	3
1	-0.0636	0.9052	-1.0441	0
2	-0.0316	-0.6566	0.8051	
3	0.0701	-0.0360		
4	0			

Tabella 8: Residui di Pearson generalizzati

Solitamente, sotto l'ipotesi di normalità dei residui, si verifica che essi siano compresi tra i valori critici ± 1.96 (intervallo di confidenza al 95%). Nel caso del modello ODP e con $\omega_{ij} = 1$ i residui divengono:

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\hat{\phi}\hat{\mu}_{ij}}} \quad (3.8)$$

Per misurare la discrepanza complessiva tra dati empirici e teorici viene solitamente utilizzata la statistica $\chi^2 = \sum_{i+j \leq t} \omega_{ij} \frac{(y_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2}{V(\hat{\mu}_{ij})}$ di Pearson e la devianza:

$$D(\hat{\mu}; y) = -2 \sum_{i+j \leq t} \omega_{ij} [y_{ij}(\hat{\theta}_{ij} - \theta_{ij}^*) - (b(\hat{\theta}_{ij}) - b(\theta_{ij}^*))] \quad (3.9)$$

con $\hat{\theta}_{ij} = b'^{-1}(\hat{\mu}_{ij})$ e $\theta_{ij}^* = b'^{-1}(y_{ij})$. Nel caso della quasi-verosimiglianza la devianza (3.9) diventa $D(\hat{\mu}; y) = -2\hat{\phi}K(y; \beta, \phi)$.

4 Il Mean Square Error of Prediction della riserva sinistri

4.1 Il caso generale

Un modello stocastico per la riserva sinistri è un metodo di previsione in cui i risarcimenti futuri sono modellati mediante l'utilizzo di stimatori che sono funzione dei dati osservati. In tal senso, oltre alla naturale variabilità propria di qualsiasi variabile aleatoria (varianza di processo), bisogna tenere anche in considerazione la variabilità insita nella stima dei parametri del modello (varianza di stima).

Dapprima si prende in esame la variabile aleatoria R che rappresenta la riserva sinistri. Utilizzando un appropriato modello per R , si definisce uno stimatore \tilde{R} calibrato sui dati osservati e si definisce errore quadratico medio (*mean square error prediction*, *MSEP*) la seguente grandezza:

$$MSEP(\tilde{R}) = E[(R - \tilde{R})^2], \quad (4.1)$$

se \tilde{R} è uno stimatore corretto per la media di R e cioè $E(R) = E(\tilde{R})$, è possibile ottenere la seguente scomposizione:

$$\begin{aligned} MSEP(\tilde{R}) &= E[(R - E(R) + E(R) - \tilde{R})^2] \approx \\ &\approx E[(R - E(R))^2] + E[(\tilde{R} - E(R))^2] = \\ &= \underbrace{Var(R)}_{\text{processo}} + \underbrace{Var(\tilde{R})}_{\text{parametro}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nel corso della derivazione della (4.2), il termine di covarianza si annulla per l'ipotesi di indipendenza tra le osservazioni passate e le previsioni future.

4.2 Impostazione nei GLM

Nella sezione 4.1 è stato presentato l'aspetto relativo alla stima dei parametri delle distribuzioni dei dati storici. Naturalmente, per valutare gli impegni futuri, occorre formulare previsioni (come nell'esempio 3) e valutare gli errori di previsione per gli elementi aleatori del triangolo inferiore. A questo fine, si

suppone che i dati osservati siano realizzazioni di variabili aleatorie stocasticamente indipendenti con distribuzioni di probabilità appartenenti alla stessa famiglia parametrica. Sotto tale ipotesi, dalle stime e dagli stimatori dei parametri ricavati dai dati di *run-off* si possono ottenere, anche per le variabili aleatorie del triangolo inferiore, stime delle distribuzioni e stimatori.

Siano $\hat{\beta} = (\hat{c}, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_I, \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_J)^T$ e $\tilde{\beta} = (\tilde{c}, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_I, \tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_J)^T$ rispettivamente, la stima e lo stimatore di massima verosimiglianza e sia $\hat{\phi}$ la stima del parametro di dispersione, per la variabile aleatoria Y_{ij} con $i+j > t$ si possono stimare la speranza matematica e la varianza mediante le:

$$\hat{E}(Y_{ij}) = \hat{\mu}_{ij} = h(\hat{\eta}_{ij}) = h(\hat{c} + \hat{a}_i + \hat{b}_j) \quad (4.3)$$

$$\widehat{Var}(Y_{ij}) = \hat{\phi}V(\hat{\mu}_{ij}) \quad (4.4)$$

si considera invece come stimatore di Y_{ij} la trasformata del predittore lineare $\tilde{Y}_{ij} = h(\tilde{\eta}_{ij}) = h(\tilde{c} + \tilde{a}_i + \tilde{b}_j)$.

Nel caso del modello ODP con *link function* logaritmica si ha:

$$\begin{aligned} \hat{E}(Y_{ij}) &= \hat{\mu}_{ij} = e^{(\hat{c} + \hat{a}_i + \hat{b}_j)} \\ \widehat{Var}(Y_{ij}) &= \hat{\phi}\hat{\mu}_{ij} \end{aligned}$$

(4.5)

Le stime delle speranze matematiche della riserva sinistri, per l'ipotesi di indipendenza stocastica, si possono ottenere come somme delle stime precedenti estese agli insiemi di indici che definiscono le diverse grandezze, analogamente si possono considerare le somme degli stimatori. Con ovvio significato dei simboli si ha:

$$\hat{E}(R_i) = \sum_{j=t-i+1}^J \hat{\mu}_{ij}, \quad \hat{E}(R) = \sum_{i+j>t} \hat{\mu}_{ij}, \quad \tilde{E}(R_i) = \sum_{j=t-i+1}^J \tilde{\mu}_{ij} \quad e \quad \tilde{E}(R) = \sum_{i+j>t} \tilde{\mu}_{ij}. \quad (4.6)$$

Gli stimatori consentono di ottenere previsioni degli elementi aleatori e stime degli errori di previsione.

Le previsioni sono date dai valori osservati degli stimatori e coincidono con le stime delle speranze matematiche sopra riportate. Per il calcolo degli errori di previsione degli stimatori si fa invece riferimento ad alcuni risultati asintotici sugli stimatori di massima verosimiglianza dei parametri nei GLM. In particolare se ϕ è noto e se sono rispettate le condizioni di regolarità della funzione di verosimiglianza, gli stimatori di massima verosimiglianza soddisfano le proprietà di consistenza e normalità asintotica. Pertanto la speranza matematica della distribuzione può essere approssimata con la stima $\hat{\beta}$ mentre la matrice varianza-covarianza può essere stimata mediante l'inversa della matrice d'informazione di Fisher⁶:

$$I(\hat{\beta}) = -E \left[\frac{\partial^2 \tilde{l}}{\partial \beta_h \partial \beta_j} \Big|_{\beta=\hat{\beta}} \right] \quad (4.7)$$

dove \tilde{l} è il numero aleatorio che si ottiene sostituendo nell'espressione della funzione di log-verosimiglianza l , le osservazioni y_{ij} che sono realizzazioni delle variabili aleatorie Y_{ij} . Se ϕ non è noto, i precedenti risultati restano validi se si sostituisce a ϕ una sua stima consistente, dunque lo stimatore $\tilde{\beta} = (\tilde{c}, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_I, \tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_J)^\top$ è in generale consistente e asintoticamente normale: $\tilde{\beta} \sim N(\hat{\beta}, I^{-1}(\hat{\beta}))$ dove $I^{-1}(\hat{\beta})$ è appunto la stima della matrice di varianza-covarianza dello stimatore $\tilde{\beta}$. In particolare:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \widehat{Var}(\hat{c}) & \dots & \widehat{Cov}(\hat{c}, \hat{a}_i) & \dots & \widehat{Cov}(\hat{c}, \hat{b}_j) & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \widehat{Cov}(\hat{a}_i, \hat{c}) & \dots & \widehat{Var}(\hat{a}_i) & \dots & \widehat{Cov}(\hat{a}_i, \hat{b}_j) & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \widehat{Cov}(\hat{b}_j, \hat{c}) & \dots & \widehat{Cov}(\hat{b}_j, \hat{a}_i) & \dots & \widehat{Var}(\hat{b}_j) & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} = I^{-1}(\hat{\beta}) \quad (4.8)$$

come descritto nella 4.1, quando la media di una variabile aleatoria e quella dello stimatore coincidono, l'errore quadratico medio di previsione (MSEP) è pari alla somma della varianza di processo e della

⁶Contributo dovuto al famoso statistico britannico Ronald A. Fisher (1890-1962) da non confondere con l'americano Wayne H. Fisher, attualmente presidente della Casualty Actuarial Society, che nel 1973 insieme a Jeffrey T. Lange ha sviluppato l'omonimo modello menzionato nell'introduzione.

varianza di parametro (vedi (4.2)). Nel caso dei modelli GLM i due valori attesi coincidono solo nel caso di *link function* identità, mentre nel caso generale può essere utilizzata la seguente approssimazione di Taylor⁷ al primo ordine (*delta method*):

$$E [\tilde{Y}_{ij}] = E [h(\tilde{\eta}_{ij})] \approx h(\eta_{ij}) + h'(\eta_{ij})E [\tilde{\eta}_{ij} - \eta_{ij}] \quad (4.9)$$

poichè lo stimatore $\tilde{\eta}_{ij}$ è asintoticamente corretto, $\tilde{\eta}_{ij} \rightarrow \eta_{ij}$, se ne ricava che $E [\tilde{Y}_{ij}] \approx E [Y_{ij}]$ e quindi per l'MSEP si ottiene che:

$$MSEP(\tilde{Y}_{ij}) = Var(Y_{ij}) + E [(\tilde{Y}_{ij} - E(Y_{ij}))^2] \approx Var(Y_{ij}) + Var(\tilde{Y}_{ij}), \quad (4.10)$$

con procedimento analogo, per la varianza si ottiene:

$$Var(\tilde{Y}_{ij}) = Var [h(\tilde{\eta}_{ij})] \approx [h'(\hat{\eta}_{ij})]^2 Var(\tilde{\eta}_{ij}). \quad (4.11)$$

La stima della varianza del predittore lineare $\tilde{\eta}_{ij}$ può essere ottenuta dalla matrice di varianza-covarianza (4.8) ed in particolare si ha

$$\widehat{Var}(\tilde{\eta}_{ij}) = \widehat{Var}(\tilde{c}) + \widehat{Var}(\tilde{a}_i) + \widehat{Var}(\tilde{b}_j) + 2 [\widehat{Cov}(\tilde{c}, \tilde{a}_i) + \widehat{Cov}(\tilde{a}_i, \tilde{b}_j) + \widehat{Cov}(\tilde{c}, \tilde{b}_j)] \quad (4.12)$$

oppure nella forma più compatta

$$\widehat{Var}(\tilde{\eta}_{ij}) = x_{ij}^T \widehat{Var}(\tilde{\beta}_{ij}) x_{ij}, \quad (4.13)$$

dove x_{ij} è il vettore di variabili *dummy* utilizzate per codificare *accident* e *development year* così come

⁷Qui e nel seguito si fa riferimento al famoso matematico inglese Brook Taylor(1685-1731) e non al già citato attuario australiano Greg Taylor (vivente), noto per aver introdotto nel 1977 il metodo della separazione per la stima della riserva sinistri e per molti altri contributi sull'argomento.

illustrato nell'esempio 2.

Infine per l'MSEP si ottiene la seguente formula:

$$\widehat{MSEP}(\check{Y}_{ij}) = \hat{\phi} \hat{\mu}_{ij} + \left[h'(\hat{\eta}_{ij}) \right]^2 \widehat{Var}(\hat{\eta}_{ij}). \quad (4.14)$$

Esempio 4 Calcolo MSEP degli importi pagati Y_{ij}

Utilizzando gli usuali dati della tabella 2, i risultati ottenuti negli esempi precedenti e le derivate parziali della (3.6) (per calcolare l'informazione di Fisher), si ottiene la stima della matrice di varianza e covarianza per lo stimatore $\hat{\beta}$, come riportata in tabella 9. Combinando le informazioni, si può ottenere la stima della varianza del predittore lineare $\widehat{Var}(\hat{\eta}_{ij})$ (vedi (4.12)); ad esempio per l'anno di origine 4 e l'anno di sviluppo 2 si ha:

$$\begin{aligned} \widehat{Var}(\hat{\eta}_{42}) &= \widehat{Var}(\hat{c}) + \widehat{Var}(\hat{a}_4) + \widehat{Var}(\hat{b}_2) + 2 \left[\widehat{Cov}(\hat{c}, \hat{a}_4) + \widehat{Cov}(\hat{a}_4, \hat{b}_2) + \widehat{Cov}(\hat{c}, \hat{b}_2) \right] = \\ &= 0.0175 + 0.0389 + 0.0206 + 2[-0.0175 + 0.0130 - 0.0130] = \\ &= 0.0420 \end{aligned}$$

Per la stima della varianza del pagato incrementale stimato si ha $\widehat{Var}(\check{Y}_{42}) = e^{2 \cdot 5.2916} \cdot 0.0420 = 1657.58$ (vedi (4.11)). Ricordando che $\hat{\phi} = 1.6022$ si ottiene $\widehat{MSEP}(\check{Y}_{42}) = 1.6022 \cdot 198.66 + 1657.58 = 1975.87$ (vedi (4.14))

	\hat{c}	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3
\hat{c}	0.0175	-0.0073	-0.0088	-0.0175	-0.0110	-0.0130	-0.0175
\hat{a}_2	-0.0073	0.0116	0.0073	0.0073	0.0000	0.0000	0.0073
\hat{a}_3	-0.0088	0.0073	0.0139	0.0088	0.0000	0.0042	0.0088
\hat{a}_4	-0.0175	0.0073	0.0088	0.0389	0.0110	0.0130	0.0175
\hat{b}_1	-0.0110	0.0000	0.0000	0.0110	0.0140	0.0110	0.0110
\hat{b}_2	-0.0130	0.0000	0.0042	0.0130	0.0110	0.0206	0.0130
\hat{b}_3	-0.0175	0.0073	0.0088	0.0175	0.0110	0.0130	0.0531

Tabella 9: Matrice $\widehat{Var}(\hat{\beta})$

Seguendo un ragionamento analogo, si può ricavare il *mean square error prediction* della riserva sinistri per la generazione di accadimento i , i.e. $\tilde{R}_i = \sum_{j=t-i+1}^J \check{Y}_{ij}$, che sulla scorta della (4.2) è ottenuta come somma della varianza di processo, $Var(R_i)$, e della varianza di parametro, $Var(\tilde{R}_i)$, e cioè:

$$MSEP(\tilde{R}_i) = Var(R_i) + Var(\tilde{R}_i) \quad (4.15)$$

Per quanto riguarda la stima della varianza di processo si ha:

$$\widehat{Var}(R_i) = \sum_{j=t-i+1}^J \widehat{Var}(Y_{ij}) = \hat{\phi} \sum_{j=t-i+1}^J \hat{\mu}_{ij}, \quad (4.16)$$

mentre per la stima della varianza di parametro:

$$\widehat{Var}(\tilde{R}_i) = \sum_{j=t-i+1}^J \widehat{Var}(\tilde{Y}_{ij}) + \sum_{\substack{j_1, j_2=t-i+1 \\ j_1 \neq j_2}}^J \widehat{Cov}(\tilde{Y}_{i, j_1}, \tilde{Y}_{i, j_2}) \quad (4.17)$$

dove la stima delle covarianze tra i pagati incrementali può essere formalizzata nel seguente modo:

$$\widehat{Cov}(\tilde{Y}_{i, j_1}, \tilde{Y}_{i, j_2}) = h'(\hat{\eta}_{i, j_1}) \cdot h'(\hat{\eta}_{i, j_2}) \cdot \widehat{Cov}(\tilde{\eta}_{i, j_1}, \tilde{\eta}_{i, j_2}). \quad (4.18)$$

e la stima della covarianza tra due predittori lineari è calcolata con la formula:

$$\widehat{Cov}(\tilde{\eta}_{i, j_1}, \tilde{\eta}_{i, j_2}) = x_{i, j_1}^T \widehat{Var}(\tilde{\beta}_{ij}) x_{i, j_2} \quad (4.19)$$

Inserendo la (4.11) e la (4.18) nella (4.17) si ottiene:

$$\widehat{Var}(\tilde{R}_i) = \sum_{j=t-i+1}^J [h'(\hat{\eta}_{ij})]^2 \widehat{Var}(\tilde{\eta}_{ij}) + \sum_{\substack{j_1, j_2=t-i+1 \\ j_1 \neq j_2}}^J h'(\hat{\eta}_{i, j_1}) \cdot h'(\hat{\eta}_{i, j_2}) \cdot \widehat{Cov}(\tilde{\eta}_{i, j_1}, \tilde{\eta}_{i, j_2}), \quad (4.20)$$

che nel caso di *link function* logaritmica la (4.20) si può scrivere nel seguente modo:

$$\widehat{Var}(\tilde{R}_i) = \sum_{j=t-i+1}^J \hat{\mu}_{ij}^2 \widehat{Var}(\tilde{\eta}_{ij}) + \sum_{\substack{j_1, j_2=t-i+1 \\ j_1 \neq j_2}}^J \hat{\mu}_{i, j_1} \hat{\mu}_{i, j_2} \widehat{Cov}(\tilde{\eta}_{i, j_1}, \tilde{\eta}_{i, j_2}). \quad (4.21)$$

per il totale della riserva sinistri invece si ha $\widehat{MSEP}(\tilde{R}) = \widehat{Var}(R) + \widehat{Var}(\tilde{R})$ dove:

$$\widehat{Var}(R) = \sum_{i+j>t} \widehat{Var}(Y_{ij}) \quad (4.22)$$

e

$$\widehat{Var}(\tilde{R}) = \sum_{i+j>t} h'(\hat{\eta}_{ij})^2 \widehat{Var}(\tilde{\eta}_{ij}) + \sum_{\substack{i_1+j_1>t \\ i_2+j_2>t \\ (i_1,j_1) \neq (i_2,j_2)}} h'(\hat{\eta}_{i_1,j_1}) \cdot h'(\hat{\eta}_{i_2,j_2}) \cdot \widehat{Cov}(\tilde{\eta}_{i_1,j_1}, \tilde{\eta}_{i_2,j_2}), \quad (4.23)$$

e nel caso di *link function* logaritmica:

$$\widehat{Var}(\tilde{R}) = \sum_{i+j>t} \hat{\mu}_{ij}^2 \widehat{Var}(\tilde{\eta}_{ij}) + \sum_{\substack{i_1+j_1>t \\ i_2+j_2>t \\ (i_1,j_1) \neq (i_2,j_2)}} \hat{\mu}_{i_1,j_1} \hat{\mu}_{i_2,j_2} \widehat{Cov}(\tilde{\eta}_{i_1,j_1}, \tilde{\eta}_{i_2,j_2}). \quad (4.24)$$

Infine, per l'ODP⁸ è possibile riscrivere le formule per il calcolo dell'MSEP nelle seguenti forme più compatte:

$$\begin{aligned} \widehat{MSEP}(\tilde{R}_i) &= \hat{\phi} \sum_{j=t-i+1}^J \hat{\mu}_{ij} + \\ &+ \sum_{j=t-i+1}^J \hat{\mu}_{ij}^2 x_{ij}^\top \widehat{Var}(\tilde{\beta}) x_{ij} + \sum_{\substack{j_1, j_2=t-i+1 \\ j_1 \neq j_2}}^J \hat{\mu}_{ij_1} \hat{\mu}_{ij_2} x_{i_1, j_1}^\top \widehat{Var}(\tilde{\beta}) x_{i_2, j_2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

⁸Un utile riferimento sul *backtesting* in relazione all'utilizzo della volatilità *ultimate* delle previsioni è in Leong et al.(10), vincitore del *Variance Prize* nel 2014.

$$\begin{aligned}
\widehat{MSEP}(\tilde{R}) &= \hat{\phi} \sum_{i+j>t} \hat{\mu}_{ij} + \\
&+ \sum_{i+j>t} \hat{\mu}_{ij}^2 x_{ij}^T \widehat{Var}(\tilde{\beta}) x_{ij} + \sum_{\substack{i_1+j_1>t \\ i_2+j_2>t \\ (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)}} \hat{\mu}_{i_1 j_1} \hat{\mu}_{i_2 j_2} x_{i_1 j_1}^T \widehat{Var}(\tilde{\beta}) x_{i_2 j_2}
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

Esempio 5 Calcolo dell'MSEP della riserva sinistri R_i

Nella tabella 10 sono riportati i risultati relativi all'MSEP della riserva sinistri con riferimento al triangolo di *run off* già utilizzato per gli esempi precedenti. In questo esempio viene illustrato il calcolo dell'MSEP per la riserva sinistri dell'anno di origine $i = 3$, $MSEP(R_3) = \widehat{Var}(R_3) + \widehat{Var}(\tilde{R}_3)$. Per il primo addendo, varianza di processo, dalla formula (4.16) si ha $\widehat{Var}(R_3) = \hat{\phi}(\hat{\mu}_{32} + \hat{\mu}_{33}) = 1.6022(174.08 + 100.04) = 439.20$; per il secondo addendo, varianza di parametro, applicando la (4.21) si ha $\widehat{Var}(\tilde{R}_3) = \hat{\mu}_{32}^2 Var(\tilde{\eta}_{32}) + \hat{\mu}_{33}^2 Var(\tilde{\eta}_{33}) + 2\hat{\mu}_{32}\hat{\mu}_{33}Cov(\tilde{\eta}_{32}, \tilde{\eta}_{33})$. Il calcolo delle varianze del predittore lineare $Var(\tilde{\eta}_{ij})$, è stato illustrato nell'esempio 4 e per il calcolo della covarianza tra due predittori lineari si procede in modo analogo. Basti pensare infatti che $\eta_{ij} = c + a_i + b_j$ e quindi nella matrice di varianza-covarianza riportata in tabella 9, bisogna selezionare gli elementi comuni a η_{32} ed η_{33} . Al fine di illustrare meglio il calcolo si replica la tabella 9 nella tabella 11, evidenziando in grassetto le varianze e le covarianze che devono essere sommate per ottenere $Cov(\tilde{\eta}_{32}, \tilde{\eta}_{33}) = 0.0175 - 0.0088 - 0.0130 - 0.0088 + 0.0139 + 0.0042 - 0.0175 + 0.0088 + 0.0130 = 0.0093$. Dunque si ha $\widehat{Var}(\tilde{R}_3) = 174.08^2 \cdot 0.0169 + 100.04^2 \cdot 0.0495 + 2 \cdot 174.08 \cdot 100.04 \cdot 0.0093 = 1331.45$. Infine si ottiene $MSEP(R_3) = 439.20 + 1331.45 = 1770.65$, la piccola differenza con i risultati riportati in tabella 10 è dovuta al fatto che nell'esempio per i calcoli intermedi le varianze e le covarianze sono state approssimate alla quarta cifra decimale.

a.y.	\hat{R}_i	$\widehat{Var}(R_i)$	$\widehat{Var}(\tilde{R}_i)$	$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)$
1	0	0	0	0
2	75.68	121.26	270.45	391.71
3	274.12	439.20	1332.26	1771.46
4	597.31	957.03	12811.76	13768.79
Tot	947.11	1517.49	17973.48	19490.97

Tabella 10: Mean square error prediction (MSEP) - Riserva sinistri

	\hat{c}	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3
\hat{c}	0.0175	-0.0073	-0.0088	-0.0175	-0.0110	-0.0130	-0.0175
\hat{a}_2	-0.0073	0.0116	0.0073	0.0073	0.0000	0.0000	0.0073
\hat{a}_3	-0.0088	0.0073	0.0139	0.0088	0.0000	0.0042	0.0088
\hat{a}_4	-0.0175	0.0073	0.0088	0.0389	0.0110	0.0130	0.0175
\hat{b}_1	-0.0110	0.0000	0.0000	0.0110	0.0140	0.0110	0.0110
\hat{b}_2	-0.0130	0.0000	0.0042	0.0130	0.0110	0.0206	0.0130
\hat{b}_3	-0.0175	0.0073	0.0088	0.0175	0.0110	0.0130	0.0531

Tabella 11: Matrice $\hat{V}ar(\hat{\beta})$, in grassetto i valori utilizzati per il calcolo di $Cov(\tilde{\eta}_{32}, \tilde{\eta}_{33})$

5 Volatilità one-year per il Claims Development Results

5.1 Stima per il totale delle generazioni

Al fine di pervenire ad una formula che consenta di stimare la volatilità *one-year*, ovvero la deviazione standard della variabile aleatoria *Claims Development Results* definita nella (2.6), si è fatto ricorso alla tecnica di propagazione dell'errore, come suggerito da Röhr (18), tecnica che consente di calcolare simultaneamente sia l'incertezza relativa alla stima dei parametri sia l'incertezza relativa al processo aleatorio sottostante i dati.

Come già descritto nella sezione 2.3, il *claim development result* è il risultato tecnico dello smontamento della riserva sinistri sull'orizzonte temporale di un anno. Data la (2.6) ed i *link ratio* definiti nella sezione 2.2, nel *framework* del *chain ladder* il $CDR_{i,t+1}$ è formalizzato nel seguente modo:

$$\widehat{CDR}_{i,t+1} = \hat{C}_{i,J}^{(t)} - \hat{C}_{i,J}^{(t+1)} = \underbrace{C_{i,t-i} \cdot \hat{f}_{t-i}^{(t)} \cdot \hat{f}_{t-i+1}^{(t)} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{J-1}^{(t)}}_{\hat{C}_{i,t-i+1}^{(t)}} - C_{i,t-i+1} \cdot \hat{f}_{t-i+1}^{(t+1)} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{J-1}^{(t+1)} \quad (5.1)$$

dunque è necessario stimare il costo ultimo $\hat{C}_{i,J}^{(t+1)}$ al tempo $t+1$, ma poichè si dispone delle osservazioni fino al tempo t , si possono utilizzare le stime $\hat{f}_j^{(t+1)}$ fatte sulla base delle osservazioni in t . A tal fine è conveniente riscrivere la (5.1) nel seguente modo:

$$\widehat{CDR}_{i,t+1} = C_{i,t-i} \left(\prod_{j=t-i}^{J-1} \hat{f}_j^{(t)} \right) \left(1 - \frac{C_{i,t-i+1}/C_{i,t-i}}{\hat{f}_{t-i}^{(t)}} \prod_{j=t-i+1}^{J-1} \frac{\hat{f}_j^{(t+1)}}{\hat{f}_j^{(t)}} \right). \quad (5.2)$$

Il rapporto tra due *link ratio*, relativi alla medesima antidurata j e stimati in due anni di bilancio consecutivi, si può stimare attraverso i coefficienti di credibilità (cfr Merz e Wüthrich (13)) con assenza di informazione a priori:

$$\frac{\hat{f}_j^{(t+1)}}{\hat{f}_j^{(t)}} = \alpha_j^{(t)} \frac{C_{t-jj+1}/C_{t-jj}}{\hat{f}_j^{(t)}} + (1 - \alpha_j^{(t)}) \quad (5.3)$$

dove $\alpha_j^{(t)} = \frac{C_{t-jj}}{\sum_{i=1}^{t-j} C_{ij}}$ è il coefficiente di credibilità.

Sfruttando la relazione (5.3) per i *link ratio*, la stima del CDR (5.2) si può riscrivere:

$$CDR_{i,t+1} = \underbrace{\hat{C}_{i,J}^{(t)}}_{\text{Costo ultimo in } t} - \underbrace{\hat{C}_{i,J}^{(t)} \frac{C_{i,t-i+1}/C_{i,t-i}}{\hat{f}_{t-i}^{(t)}} \prod_{j=t-i+1}^{J-1} \left(\alpha_j^{(t)} \frac{C_{t-jj+1}/C_{t-jj}}{\hat{f}_j^{(t)}} + (1 - \alpha_j^{(t)}) \right)}_{\text{Costo ultimo in } t+1, \hat{C}_{i,J}^{(t+1)}} \quad (5.4)$$

Come dimostrato in Renshaw e Verrall (17), tra i *link ratio* ottenuti con il metodo *chain ladder* ed i parametri stimati con il metodo GLM esiste la seguente relazione:

$$\hat{f}_j^{(t)} = 1 + \frac{e^{\hat{b}_{j+1}}}{\sum_{k=0}^j e^{\hat{b}_k}} = \frac{\sum_{k=0}^{j+1} e^{\hat{b}_k}}{\sum_{k=0}^j e^{\hat{b}_k}} \quad j = 0, \dots, J-1. \quad (5.5)$$

sulla base della (5.5) per il prodotto dei *link ratio* si ha $\prod_{j=t-i}^{J-1} \hat{f}_j^{(t)} = \frac{\sum_{k=0}^J e^{\hat{b}_k}}{\sum_{k=0}^{t-i} e^{\hat{b}_k}}$ e quindi la stima del costo ultimo può essere definita come:

$$\hat{C}_{t-j,J}^{(t)} = C_{t-jj} \frac{\sum_{k=0}^J e^{\hat{b}_k}}{\sum_{k=0}^j e^{\hat{b}_k}} \quad j = 0, \dots, J-1 \quad (5.6)$$

Con riferimento invece al pagato cumulato C_{t-jj+1} (che in t è una variabile aleatoria) si ha:

$$\begin{aligned} C_{t-jj+1} &= C_{t-jj} + Y_{t-jj+1} \\ &= \hat{C}_{t-j,J}^{(t)} \frac{\sum_{k=0}^j e^{\hat{b}_k}}{\sum_{k=0}^J e^{\hat{b}_k}} + Y_{t-jj+1} \\ &= \hat{C}_{t-j,J}^{(t)} \frac{\sum_{k=0}^{j+1} e^{\hat{b}_k}}{\sum_{k=0}^J e^{\hat{b}_k}} + Y_{t-jj+1} - \hat{C}_{t-j,J}^{(t)} \frac{e^{\hat{b}_{j+1}}}{\sum_{k=0}^J e^{\hat{b}_k}} \\ &= \hat{C}_{t-j,J}^{(t)} \frac{\sum_{k=0}^{j+1} e^{\hat{b}_k}}{\sum_{k=0}^J e^{\hat{b}_k}} + Y_{t-jj+1} - e^{\hat{c} + \hat{a}_{t-j} + \hat{b}_{j+1}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

nel corso della derivazione si è tenuto conto che $\hat{C}_{t-j,J}^{(t)} = \sum_{k=0}^J \hat{Y}_{t-j,k} = e^{\hat{c} + \hat{a}_{t-j}} \sum_{k=0}^J e^{\hat{b}_k}$. Aggiungendo e sottraendo il valore teorico $e^{c+a_{t-j}+b_{j+1}}$ alla (5.7) si ottiene:

$$C_{t-j,j+1} = \hat{C}_{t-j,J}^{(t)} \frac{\sum_{k=0}^{j+1} e^{\hat{b}_k}}{\sum_{k=0}^J e^{\hat{b}_k}} + \underbrace{Y_{t-j,j+1} - e^{c+a_{t-j}+b_{j+1}}}_{\xi_{t-j,j+1}} + \underbrace{e^{c+a_{t-j}+b_{j+1}} - e^{\hat{c} + \hat{a}_{t-j} + \hat{b}_{j+1}}}_{\zeta_{t-j,j+1}} \quad (5.8)$$

il pagato cumulato $C_{t-j,j+1}$ dell'anno successivo si scompone, come suggerito in Röhr (18), attraverso il residuo $\xi_{t-j,j+1}$ riguardante la varianza di processo ed il residuo $\zeta_{t-j,j+1}$ inerente la varianza di parametro.

Tenendo conto della (5.5), della (5.6) e della (5.8), è possibile ottenere la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \frac{C_{t-j,j+1}/C_{t-j,j}}{\hat{f}_j^{(t)}} &= \frac{\hat{C}_{t-j,J}^{(t)} \sum_{k=0}^{j+1} e^{\hat{b}_k} \sum_{k=0}^j e^{\hat{b}_k}}{\underbrace{C_{t-j,J} \sum_{k=0}^J e^{\hat{b}_k} \sum_{k=0}^{j+1} e^{\hat{b}_k}}_{=1}} + (\xi_{t-j,j+1} + \zeta_{t-j,j+1}) \frac{1}{C_{t-j,j}} \frac{\sum_{k=0}^j e^{\hat{b}_k}}{\sum_{k=0}^{j+1} e^{\hat{b}_k}} \\ &= 1 + (\xi_{t-j,j+1} + \zeta_{t-j,j+1}) \frac{1}{\hat{C}_{t-j,j+1}^{(t)}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

e quindi il costo ultimo in $(t+1)$ per l'anno di accadimento i , ovvero il secondo addendo della (5.4), si può riscrivere:

$$\hat{C}_{i,J}^{(t+1)} = \hat{C}_{i,J}^{(t)} \left(1 + \frac{\xi_{i,t-i+1} + \zeta_{i,t-i+1}}{\hat{C}_{i,t-i+1}^{(t)}} \right) \prod_{j=t-i+1}^{J-1} \left(1 + \alpha_j^{(t)} \frac{\xi_{t-j,j+1} + \zeta_{t-j,j+1}}{\hat{C}_{t-j,j+1}^{(t)}} \right) \quad (5.10)$$

e di conseguenza il costo relativo all'insieme di tutte le generazioni, si ottiene sommando i costi di tutti gli anni di accadimento:

$$\sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t+1)} = \sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t)} \left(1 + \frac{\xi_{i,t-i+1} + \zeta_{i,t-i+1}}{\hat{C}_{i,t-i+1}^{(t)}} \right) \prod_{j=t-i+1}^{J-1} \left(1 + \alpha_j^{(t)} \frac{\xi_{t-j,j+1} + \zeta_{t-j,j+1}}{\hat{C}_{t-j,j+1}^{(t)}} \right) \quad (5.11)$$

dunque è possibile interpretare la previsione del costo ultimo in $t+1$ come una perturbazione della previsione al tempo t , dove i residui $\xi_{t-j,j+1}$ e $\zeta_{t-j,j+1}$ rappresentano l'innovazione del processo. Un approccio simulativo richiederebbe la simulazione di $\xi_{t-j,j+1}$ e la stima mediante *bootstrap* di $\zeta_{t-j,j+1}$.

Si noti che i due residui sono indipendenti per le assunzioni di base del modello.

Per determinare una formula chiusa, si utilizzerà un approccio differente considerando l'espansione di Taylor di tale perturbazione.

Nel primo step, si considera la perturbazione relativa alla varianza di processo, si calcolano le derivate⁹ con riferimento al primo residuo e si valutano in 0 (per ogni ξ e ζ) ottenendo i seguenti pesi:

$$\begin{aligned} q_{k+1}^{(t)} &= \left. \partial_{\log Y_{t-k,k+1}} \log \left(\sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t+1)} \right) \right|_0 = \\ &= \left. \frac{\partial_{\log Y_{t-k,k+1}} \sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t+1)}}{\sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t+1)}} \right|_0 = \left. \frac{\partial_{\log Y_{t-k,k+1}} \sum_{i=t-k}^I \hat{C}_{i,J}^{(t+1)}}{\sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t+1)}} \right|_0 \quad t-l \leq k \leq J-1 \end{aligned} \quad (5.12)$$

al fine di rendere più agevole la rappresentazione si considera inizialmente lo sviluppo della derivata del primo addendo del numeratore della (5.12):

$$\begin{aligned} \left. \partial_{\log Y_{t-k,k+1}} \hat{C}_{t-k,J}^{(t+1)} \right|_0 &= \left. \partial_{\log Y_{t-k,k+1}} \hat{C}_{t-k,J}^{(t)} \left(1 + \frac{\xi_{t-k,k+1} + \zeta_{t-k,k+1}}{\hat{C}_{t-k,k+1}^{(t)}} \right) \prod_{j=k+1}^{J-1} \left(1 + \alpha_j^{(t)} \frac{\xi_{t-jj+1} + \zeta_{t-jj+1}}{\hat{C}_{t-jj+1}^{(t)}} \right) \right|_0 \\ &= \hat{C}_{t-k,J}^{(t)} \left(\left. \partial_{\log Y_{t-k,k+1}} \frac{\xi_{t-k,k+1}}{\hat{C}_{t-k,k+1}^{(t)}} \right) \prod_{j=k+1}^{J-1} \left(1 + \alpha_j^{(t)} \frac{\xi_{t-jj+1} + \zeta_{t-jj+1}}{\hat{C}_{t-jj+1}^{(t)}} \right) \right|_0 \\ &= \hat{C}_{t-k,J}^{(t)} \left(\left. \partial_{\log Y_{t-k,k+1}} \frac{Y_{t-k,k+1}}{\hat{C}_{t-k,k+1}^{(t)}} \right) \prod_{j=k+1}^{J-1} \left(1 + \alpha_j^{(t)} \frac{\xi_{t-jj+1} + \zeta_{t-jj+1}}{\hat{C}_{t-jj+1}^{(t)}} \right) \right|_0 \\ &= \hat{C}_{t-k,J}^{(t)} \frac{Y_{t-k,k+1}}{\hat{C}_{t-k,k+1}^{(t)}} \prod_{j=k+1}^{J-1} \left(1 + \alpha_j^{(t)} \frac{\xi_{t-jj+1} + \zeta_{t-jj+1}}{\hat{C}_{t-jj+1}^{(t)}} \right) \Big|_0 \\ &= \hat{C}_{t-k,J}^{(t)} \frac{e^{c+a_{t-k}+b_{k+1}}}{\hat{C}_{t-k,k+1}^{(t)}}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

applicando lo stesso calcolo anche agli altri addendi si ottiene:

$$q_{k+1}^{(t)} = \frac{\frac{e^{c+a_{t-k}+b_{k+1}}}{\hat{C}_{t-k,k+1}^{(t)}} \left(\hat{C}_{t-k,J}^{(t)} + \alpha_k^{(t)} \sum_{i=t-k+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t)} \right)}{\sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t)}} \quad t-l \leq k \leq J-1 \quad (5.14)$$

nel corso della derivazione si è tenuto conto che $\partial_{\log x} f(x) = x \frac{\partial}{\partial x} f(x)$. Considerando invece che

⁹La chiave per comprendere la determinazione di queste derivate risiede nella circostanza che questi due residui fluttuano intorno allo zero, il primo esattamente in media ed il secondo condizionatamente ad un potenziale *bias* nella stima di massima verosimiglianza. Pertanto risulta possibile sostituire il dato empirico e quello stimato con il valore teorico incognito rispettivamente per ξ e per ζ .

$\partial_{\log x} \log(f(x)) = \frac{x}{f(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x)$, è possibile scrivere

$$\partial_{Y_{t-k,k+1}} \sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t+1)} \Big|_0 = \frac{q_{k+1}^{(t)}}{e^{c+a_{t-k}+b_{k+1}}} \sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t)} \quad (5.15)$$

Per quanto concerne il residuo ζ , relativo all'errore di parametro, si considera inizialmente la derivata rispetto alla stima del parametro di intercetta c :

$$\partial_{\hat{c}_{k+1}} \zeta_{t-k,k+1} = \partial_{\hat{c}_{k+1}} \left(e^{c+a_{t-k}+b_{k+1}} - e^{\hat{c}+\hat{a}_{t-k}+\hat{b}_{k+1}} \right) = -e^{\hat{c}+\hat{a}_{t-k}+\hat{b}_{k+1}} \quad (5.16)$$

e quindi derivando il costo ultimo $\sum_{i=t-k}^I \hat{C}_{i,J}^{(t+1)}$ rispetto a \hat{c} e valutando la derivata in 0 (per ogni ξ e ζ , per l'ultimo si considera anche l'uguaglianza per ogni parametro), analogamente a quanto fatto per calcolare la (5.12) e la (5.15) si ottiene:

$$\partial_{\hat{c}_{k+1}} \sum_{i=t-k}^I \hat{C}_{i,J}^{(t+1)} \Big|_0 = -\frac{e^{c+a_{t-k}+b_{k+1}}}{\hat{C}_{t-k,k+1}^{(t)}} \left(\hat{C}_{t-k,J}^{(t)} + \alpha_j^{(t)} \sum_{i=t-k+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t)} \right) = -q_{k+1}^{(t)} \sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t)} \quad (5.17)$$

e in modo del tutto simile si ottengono le derivate rispetto ai parametri \hat{a}_{t-k} e \hat{b}_{k+1} :

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{a}_{t-k}} \sum_{i=t-k}^I \hat{C}_{i,J}^{(t+1)} \Big|_0 &= -q_{k+1}^{(t)} \sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t)} \\ \partial_{\hat{b}_{k+1}} \sum_{i=t-k}^I \hat{C}_{i,J}^{(t+1)} \Big|_0 &= -q_{k+1}^{(t)} \sum_{i=t-J+1}^I \hat{C}_{i,J}^{(t)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Utilizzando le derivate sopraelencate per il rapporto tra il costo ultimo stimato in $t+1$ (che in t è

aleatorio) ed in t si giunge all'approssimazione in serie di Taylor del prim'ordine:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=t-J+1}^t \hat{C}_{i,J}^{(t+1)}}{\sum_{i=t-J+1}^t \hat{C}_{i,J}^{(t)}} &= \frac{\sum_{i=t-J+1}^t \hat{C}_{i,J}^{(t)} \left(1 + \frac{\xi_{i,t-i+1} + \zeta_{i,t-i+1}}{\hat{C}_{i,t-i+1}^{(t)}} \right) \prod_{j=t-i+1}^{J-1} \left(1 + \alpha_j^{(t)} \frac{\xi_{t-j,i+1} + \zeta_{t-j,i+1}}{\hat{C}_{t-j,i+1}^{(t)}} \right)}{\sum_{i=t-J+1}^t \hat{C}_{i,J}^{(t)}} \\
&\approx 1 + \sum_{k=t-l}^{J-1} \frac{q_{k+1}^{(t)}}{e^{c+a_{t-k}+b_{k+1}}} \xi_{t-j,j+1} - \sum_{k=t-l}^{J-1} q_{k+1}^{(t)} (c - \hat{c} + a_{t-k} - \hat{a}_{t-k} + b_{k+1} - \hat{b}_{k+1}) \\
&= 1 + \sum_{k=t-l}^{J-1} \frac{q_{k+1}^{(t)}}{\mu_{t-k,k+1}^{(t)}} \xi_{t-j,j+1} - \sum_{k=t-l}^{J-1} q_{k+1}^{(t)} (\eta_{t-k,k+1} - \hat{\eta}_{t-k,k+1}) \\
&= 1 + \sum_{k=t-l}^{J-1} \frac{q_{k+1}^{(t)}}{\mu_{t-k,k+1}^{(t)}} \xi_{t-j,j+1} - \sum_{k=t-l}^{J-1} q_{k+1}^{(t)} x_{t-k,k+1}^\top (\beta - \hat{\beta})
\end{aligned} \tag{5.19}$$

dove $x_{t-k,k+1}^\top$ è il vettore di variabili *dummy* utilizzate per codificare *accident* e *development year* così come illustrato nell'esempio 2.

Utilizzando le formule (5.4) e (5.19), portando il denominatore (cambiato di segno) dal primo al secondo membro e sfruttando l'assunzione di indipendenza tra i pagati incrementali, per il quadrato della somma dei *Claims Development Results* si giunge alla seguente approssimazione del prim'ordine:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=t-J+1}^t \widehat{CDR}_{i,t+1} \right)^2 &\approx \left(\sum_{i=t-J+1}^t \hat{C}_{i,J}^{(t)} \right)^2 \left[\sum_{k=t-l}^{J-1} \frac{(q_{k+1}^{(t)})^2}{\mu_{t-k,k+1}^2} \xi_{t-j,j+1}^2 + \right. \\
&+ \left. \sum_{k_1=t-l}^{J-1} \sum_{k_2=t-l}^{J-1} q_{k_1+1}^{(t)} q_{k_2+1}^{(t)} \cdot x_{t-k,k+1}^\top (\beta - \hat{\beta})(\beta - \hat{\beta})^\top x_{t-k,k+1} \right] = \\
&= \left(\sum_{i=t-J+1}^t \hat{C}_{i,J}^{(t)} \right)^2 \left[\sum_{k=t-l}^{J-1} \frac{(q_{k+1}^{(t)})^2}{\mu_{t-k,k+1}^2} \text{Var}(Y_{t-k,k+1}) + \right. \\
&+ \left. \sum_{k_1=t-l}^{J-1} \sum_{k_2=t-l}^{J-1} q_{k_1+1}^{(t)} q_{k_2+1}^{(t)} \cdot x_{t-k,k+1}^\top \text{Var}(\beta) x_{t-k,k+1} \right].
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Nella (5.20) sono stati omissi i prodotti tra i residui ξ e ζ poiché, in quanto indipendenti, si annulleranno nella (5.21).

Sostituendo le stime dei parametri ai corrispondenti valori incogniti si ottiene la stima del *mean square error of prediction* del CDR (cioè della perdita *one year*) per il totale delle generazioni:

$$\widehat{MSEP} \left(\sum_{i=t-J+1}^I \widehat{CDR}_{i,t+1} \right) = \left(\sum_{i=t-J+1}^I \sum_{j=0}^J \hat{\mu}_{ij} \right)^2 \times$$

$$\times \left[\underbrace{\hat{\phi} \sum_{k=t-l}^{J-1} \frac{\hat{q}_{k+1}^2}{\hat{\mu}_{t-k,k+1}}}_{\text{processo}} + \underbrace{\hat{q}^\top X_{(t+1)} \widehat{Var}(\hat{\beta}) X_{(t+1)}^\top \hat{q}}_{\text{parametro}} \right]$$

(5.21)

dove $X_{(t+1)}$ (*hat matrix*) è la matrice che codifica mediante le variabili *dummy* gli *accident* e *development year* relativi ai pagati incrementali dell'anno $t + 1$, mentre $\hat{q} = \{\hat{q}_{k+1}\}_{k=t-l}^{J-1}$ è il vettore della stima dei pesi q_{k+1} ricavati nella (5.14) e specificata meglio utilizzando la formalizzazione dei GLM:

$$\hat{q}_{k+1} = \frac{\frac{e^{\hat{c} + \hat{a}_{t-k} + \hat{b}_{k+1}}}{\sum_{j=0}^{k+1} e^{\hat{c} + \hat{a}_{t-k} + \hat{b}_j}} \left(\sum_{j=0}^J e^{\hat{c} + \hat{a}_{t-k} + \hat{b}_j} + \alpha_k^{(t)} \sum_{i=t-k+1}^I \sum_{j=0}^J e^{\hat{c} + \hat{a}_i + \hat{b}_j} \right)}{\sum_{i=t-J+1}^I \sum_{j=0}^J e^{\hat{c} + \hat{a}_i + \hat{b}_j}} \quad (5.22)$$

Si osservi che per $k = 0$ si ha $t - k + 1 > I$, in tale situazione la sommatoria è nulla. Con le opportune semplificazioni la (5.22) si riscrive in modo più semplice come riportato nella (5.23),

$$\hat{q}_{k+1} = \frac{\frac{e^{\hat{b}_{k+1}}}{\sum_{j=0}^{k+1} e^{\hat{b}_j}} \left(e^{\hat{a}_{t-k}} + \alpha_k^{(t)} \sum_{i=t-k+1}^I e^{\hat{a}_i} \right)}{\sum_{i=t-J+1}^I e^{\hat{a}_i}}.$$

(5.23)

Esempio 6 Calcolo del MSEP per il *Clamis Development Result*: totale delle generazioni

Per il calcolo del *Mean Square Error Prediction* del CDR si procede calcolando separatamente le grandezze intermedie della (5.21). La quantità tra parentesi tonde si riferisce a tutti i pagati incrementali (futuri e passati) stimati con il modello GLM esclusa la prima generazione, dunque è sufficiente sommare tutti i valori esposti nella tabella 7 escludendo la prima riga, ottenendo così:

$$\sum_{i=t-J+1}^I \sum_{j=0}^J \hat{\mu}_{ij} = \sum_{i=2}^4 \sum_{j=0}^3 \hat{\mu}_{ij} = 1707.11$$

Si procede adesso con il calcolo del termine relativo alla varianza di processo, i valori $\hat{\mu}_{t-k,k+1}$ con $k = 0, 1, 2$,

riportati in tabella 13 sono i pagati incrementali stimati per l'anno successivo e rappresentano la prima diagonale non nota (vedi tab. 7). I valori \hat{q}_{k+1} con $k = 0, 1, 2$, riportati anch'essi in tabella 13, sono determinati utilizzando la (5.23); a titolo illustrativo si riporta il dettaglio dei calcoli per \hat{q}_{k+1} con $k = 1$:

$$\hat{q}_2 = \frac{\frac{e^{\hat{b}_2}}{e^{\hat{b}_0} + e^{\hat{b}_1} + e^{\hat{b}_2}} (e^{\hat{a}_3} + \alpha_1 e^{\hat{a}_4})}{e^{\hat{a}_2} + e^{\hat{a}_3} + e^{\hat{a}_4}} = \frac{\frac{e^{0.9741}}{1 + e^{1.3332} + e^{0.9741}} (e^{0.7989} + 0.4532 \cdot e^{0.9310})}{e^{0.5199} + e^{0.7989} + e^{0.9310}} = 0.1864$$

a questo punto si è in grado di calcolare il termine relativo alla varianza di processo:

$$\hat{\phi} \sum_{k=0}^2 \frac{\hat{q}_{k+1}^2}{\hat{\mu}_{4-k, k+1}} = 1.6022 \cdot \left(\frac{0.3117^2}{284.48} + \frac{0.1864^2}{174.08} + \frac{0.1230^2}{75.68} \right) = 0.00118727.$$

Per il calcolo del termine relativo alla varianza di parametro, $\hat{q}^T X_{(t+1)} \widehat{Var}(\hat{\beta}) X_{(t+1)}^T \hat{q}$, si considera il risultato intermedio che consiste nel prodotto matriciale tra la matrice di varianza-covarianza $\widehat{Var}(\hat{\beta})$ dei parametri del GLM (tab. 9) e la *hat matrix* (tab. 12):

$$X_{(t+1)} \widehat{Var}(\hat{\beta}) X_{(t+1)}^T = \begin{bmatrix} 0.0353 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0169 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0472 \end{bmatrix}$$

e si conclude, per il termine relativo alla varianza di parametro, con il seguente prodotto matriciale con i pesi \hat{q} :

$$\hat{q}^T X_{(t+1)} \widehat{Var}(\hat{\beta}) X_{(t+1)}^T \hat{q} = \begin{bmatrix} 0.3117 & 0.1864 & 0.1230 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0353 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0169 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3117 \\ 0.1864 \\ 0.1230 \end{bmatrix} = 0.00473092$$

Combinando i tre risultati ottenuti è possibile calcolare la (5.21) per la stima del *Mean Square Error Prediction* :

$$\widehat{MSEP} \left(\sum_{i=t-J+1}^t CDR_{i, t+1} \right) = 1707.11^2 \cdot (0.00118727 + 0.00473092) = 17246.93$$

solitamente si fa riferimento al *root Mean Square Error Prediction* (rMSEP), ovvero $\sqrt{\widehat{MSEP}}$ rapportato alla riserva sinistri:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\widehat{MSEP}}}{\hat{R}^{(t)}} = \frac{\sqrt{17246.93}}{947.11} = 0.1387 = 13.87\%$$

σ rappresenta dunque la volatilità *one year* per il totale delle generazioni.

i	j	$X_{(t+1)}$						
		Int.	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
4	1	1	0	0	1	1	0	0
3	2	1	0	1	0	0	1	0
2	3	1	1	0	0	0	0	1

Tabella 12: Codifica dei pagamenti da effettuare in $t + 1$ (*hat matrix*)

k	$t - k$	$\hat{\alpha}_k^{(t)}$	\hat{q}_{k+1}	$\hat{\mu}_{t-k,k+1}$
0	4	0.3409	0.3117	284.48
1	3	0.4532	0.1864	174.08
2	2	0.6271	0.1230	75.68

Tabella 13: Stime di α , q e μ

5.2 Stima per le singole generazioni

In questa sezione si illustra la determinazione della volatilità *one year* per una fissata generazione di accadimento i^* . Partendo dalla (5.10), che per comodità si riporta,

$$\hat{C}_{i^*,J}^{(t+1)} = \hat{C}_{i^*,J}^{(t)} \left(1 + \frac{\xi_{i^*,t-i^*+1} + \zeta_{i^*,t-i^*+1}}{\hat{C}_{i^*,t-i^*+1}^{(t)}} \right) \prod_{j=t-i^*+1}^{J-1} \left(1 + \alpha_j^{(t)} \frac{\xi_{t-j,j+1} + \zeta_{t-j,j+1}}{\hat{C}_{t-j,j+1}^{(t)}} \right) \quad (5.24)$$

si procede ad ottenere una approssimazione mediante espansione in serie di Taylor dei residui. In analogia a quanto fatto nella sezione precedente, si calcola la derivata parziale, nel punto $\xi, \zeta = 0$, del logaritmo del costo ultimo stimato in $(t + 1)$:

$$s_{i^*,k+1} = \partial_{\log X_{t-k,k+1}} \log \left(C_{i^*,J}^{(t+1)} \right) \Big|_0 = \frac{\partial_{\log Y_{t-k,k+1}} C_{i^*,J}^{(t+1)}}{C_{i^*,J}^{(t+1)}} \Big|_0 \quad (5.25)$$

considerando dapprima il caso in cui $i^* = t - k$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \partial_{\log Y_{t-k,k+1}} C_{i^*,J}^{(t+1)} \Big|_0 &= \hat{C}_{i^*,J}^{(t)} \frac{Y_{i^*,t-i^*+1}}{\hat{C}_{i^*,t-i^*+1}^{(t)}} \prod_{j=t-i^*+1}^{J-1} \left(1 + \alpha_j^{(t)} \frac{\xi_{t-j,j+1} + \zeta_{t-j,j+1}}{\hat{C}_{t-j,j+1}^{(t)}} \right) \Big|_0 = \\ &= \hat{C}_{i^*,J}^{(t)} \frac{e^{c+a_{i^*}+b_{t-i^*+1}}}{\underbrace{\hat{C}_{i^*,t-i^*+1}^{(t)}}_{r_{t-i^*+1}^{(t)}}} = \hat{C}_{i^*,J}^{(t)} r_{t-i^*+1}^{(t)} \quad i^* = t - k \end{aligned} \quad (5.26)$$

dunque nel caso specifico $i^* = t - k$ si ha che $s_{t-i^*+1}^{(t)} = r_{t-i^*+1}^{(t)}$, mentre per $i^* > t - k$ la derivata logaritmica (5.25) diventa:

$$\begin{aligned} \partial_{\log Y_{t-k,k+1}} C_{i^*,J}^{(t+1)} \Big|_0 &= \hat{C}_{i^*,J}^{(t)} \left(1 + \frac{\xi_{it-i^*+1} + \zeta_{it-i^*+1}}{\hat{C}_{it-i^*+1}^{(t)}} \right) \alpha_k^{(t)} \frac{Y_{t-k,k+1}}{\hat{C}_{t-k,k+1}^{(t)}} \prod_{\substack{j=t-i^*+1 \\ j \neq k}}^{J-1} \left(1 + \alpha_j^{(t)} \frac{\xi_{t-jj+1} + \zeta_{t-jj+1}}{\hat{C}_{t-jj+1}^{(t)}} \right) \Big|_0 = \\ &= \hat{C}_{i^*,J}^{(t)} \alpha_k^{(t)} \frac{e^{c+a_{t-k}+b_{k+1}}}{\hat{C}_{t-k,k+1}^{(t)}} = \hat{C}_{i^*,J}^{(t)} \underbrace{\alpha_k^{(t)} r_{k+1}^{(t)}}_{s_{i^*,k+1}^{(t)}} \quad i^* > t - k \end{aligned} \quad (5.27)$$

e si ha $s_{i^*,k+1}^{(t)} = \alpha_k^{(t)} r_{k+1}^{(t)}$. Nel caso particolare del modello di stima GLM, con *link function* logaritmica e distribuzione ODP, si ottiene la seguente forma semplificata per il ratio $r_{k+1}^{(t)}$:

$$r_{k+1}^{(t)} = \frac{e^{b_{k+1}}}{\sum_{j=0}^{k+1} e^{b_j}} = 1 - \frac{1}{f_k^{(t)}} \quad k = 0, \dots, J - 1 \quad (5.28)$$

come per la (5.15), tenendo in considerazione che $\partial_{\log x} \log(f(x)) = \frac{x}{f(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x)$, si ottiene:

$$\partial_{Y_{t-k,k+1}} \hat{C}_{i^*,J}^{(t+1)} \Big|_0 = \begin{cases} \frac{\hat{C}_{i^*,J}^{(t)} r_{t-i^*+1}^{(t)}}{e^{c+a_{i^*}+b_{t-i^*+1}}} & i^* = t - k \\ \frac{\hat{C}_{i^*,J}^{(t)} \alpha_k^{(t)} r_{k+1}^{(t)}}{e^{c+a_{t-k}+b_{k+1}}} & i^* > t - k, \end{cases} \quad (5.29)$$

analogamente recuperando le derivate parziali del residuo ζ rispetto ai parametri del modello GLM riportate nella (5.16) e nelle (5.17), si ottengono le derivate parziali, nel punto $\xi, \zeta = 0$, del costo ultimo $\hat{C}_{i^*,J}^{(t+1)}$, ad esempio rispetto a \hat{b}_{k+1} :

$$\partial_{\hat{b}_{k+1}} \hat{C}_{i^*,J}^{(t+1)} \Big|_0 = \begin{cases} -\hat{C}_{i^*,J}^{(t)} \frac{e^{c+a_{i^*}+b_{t-i^*+1}}}{\hat{C}_{i^*,t-i^*+1}^{(t)}} & = -\hat{C}_{i^*,J}^{(t)} r_{t-i^*+1}^{(t)} & i^* = t - k \\ -\hat{C}_{i^*,J}^{(t)} \frac{e^{c+a_{t-k}+b_{k+1}}}{\hat{C}_{t-k,k+1}^{(t)}} \alpha_k^{(t)} & = -\hat{C}_{i^*,J}^{(t)} \alpha_k^{(t)} r_{k+1}^{(t)} & i^* > t - k \end{cases} \quad (5.30)$$

Utilizzando i risultati precedenti, per la generazione i^* si ottiene la seguente approssimazione di Taylor per il rapporto tra la stima del costo ultimo fatta in $t + 1$ e quella fatta in t :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{C}_{i^*,J}^{(t+1)}}{\hat{C}_{i^*,J}^{(t)}} &\approx 1 + \sum_{k=t-i^*}^{J-1} \frac{s_{i^*,k+1}^{(t)}}{\mu_{t-k,k+1}} \xi_{t-k,k+1} - \sum_{k=t-i^*}^{J-1} s_{i^*,k+1}^{(t)} (\eta_{t-k,k+1} - \hat{\eta}_{t-k,k+1}) \\ &= 1 + \sum_{k=t-i^*}^{J-1} \frac{s_{i^*,k+1}^{(t)}}{\mu_{t-k,k+1}} \xi_{t-k,k+1} - \sum_{k=t-i^*}^{J-1} s_{i^*,k+1}^{(t)} x_{t-k,k+1}^\top (\beta - \hat{\beta}), \end{aligned} \quad (5.31)$$

quindi, in modo del tutto simile alla (5.20), per il quadrato *claims development ratio* si ricava la seguente espansione di Taylor troncata al prim'ordine:

$$\begin{aligned} \widehat{CDR}_{i^*,t+1}^2 &\approx \left(\hat{C}_{i^*,J}^{(t)}\right)^2 \left\{ \sum_{k=t-i^*}^{J-1} \left(\frac{s_{i^*,k+1}^{(t)}}{\mu_{t-k,k+1}} \xi_{t-k,k+1} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{k_1=t-i^*}^{J-1} \sum_{k_2=t-i^*}^{J-1} s_{i^*,k_1+1}^{(t)} s_{i^*,k_2+1}^{(t)} x_{t-k_1,k_1+1}^\top (\beta - \hat{\beta}) (\beta - \hat{\beta})^\top x_{t-k_2,k_2+1} \right\} = \\ &= \left(\hat{C}_{i^*,J}^{(t)}\right)^2 \left\{ \sum_{k=t-i^*}^{J-1} \left(\frac{s_{i^*,k+1}^{(t)}}{\mu_{t-k,k+1}} \right)^2 \text{Var}(Y_{t-k,k+1}) + \right. \\ &+ \left. \sum_{k_1=t-i^*}^{J-1} \sum_{k_2=t-i^*}^{J-1} s_{i^*,k_1+1}^{(t)} s_{i^*,k_2+1}^{(t)} x_{t-k_1,k_1+1}^\top \text{Var}(\beta) x_{t-k_2,k_2+1} \right\} \end{aligned} \quad (5.32)$$

infine, per la stima del *mean square error of prediction* si ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \widehat{MSEP}(\widehat{CDR}_{i^*,t+1}) &= \left(\sum_{j=0}^J e^{\hat{c} + \hat{a}_{i^*} + \hat{b}_j} \right)^2 \times \\ &\times \left(\hat{\phi} \sum_{k=t-i^*}^{J-1} \frac{s_{i^*,k+1}^2}{\mu_{t-k,k+1}} + \hat{s}_{(i^*)}^\top X_{i^*,(t+1)} \widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}) X_{i^*,(t+1)}^\top \hat{s}_{(i^*)} \right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

dove $\hat{s}_{(i^*)}$ è un vettore di lunghezza $i^* - 1$ i cui elementi sono:

$$\hat{s}_{i^*,k+1} = \begin{cases} \hat{r}_{t-i^*+1} & t - k = i^* \\ \hat{r}_{k+1} \alpha_k^{(t)} & 2 \leq t - k < i^* \end{cases} \quad k = t - i^*, \dots, J - 1 \quad (5.34)$$

mentre $X_{i^*,(t+1)}$ è la matrice di proiezione (*hat matrix*) che codifica i pagamenti incrementali dell'anno successivo $t + 1$ per la generazione i^* e per quelle precedenti.

Esempio 7 Calcolo MSEP per il *claims development result* per la generazione i^*

In questo esempio si procede ad illustrare l'implementazione della formula (5.33) per il calcolo del *Mean Square Error of Prediction* per singola generazione di accadimento ed in particolare per la generazione di accadimento $i^* = 3$. Si inizia con il calcolo del vettore $\hat{s}_{(3)}$; in base alla (5.34) ed alla (5.28) si ha $\hat{s}_{(3)} = \{\hat{r}_2, \hat{r}_1 \cdot \alpha_2^{(4)}\} = \{0.3559, 0.1698 \cdot 0.6271\} = \{0.3559, 0.1065\}$. La *hat matrix* $X_{i^*,(t+1)}$ è riportata in tabella 17 ed ovviamente rispetto alla tabella 12 non contiene la riga relativa al pagato incrementale $Y_{4,1}$.

Come nell'esempio 6, per il calcolo del termine relativo alla varianza di parametro, $\hat{s}_{(i^*)}^\top X_{i^*,(t+1)} \widehat{Var}(\hat{\beta}) X_{i^*,(t+1)}^\top \hat{s}_{(i^*)}$, si considera il risultato intermedio:

$$X_{i^*,(t+1)} \widehat{Var}(\hat{\beta}) X_{i^*,(t+1)}^\top = \begin{bmatrix} 0.0169 & 0 \\ 0 & 0.0472 \end{bmatrix}$$

mentre per l'intero termine si ha:

$$\hat{s}_{(i^*)}^\top X_{i^*,(t+1)} \widehat{Var}(\hat{\beta}) X_{i^*,(t+1)}^\top \hat{s}_{(i^*)} = \begin{bmatrix} 0.3559 & 0.1065 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0169 & 0 \\ 0 & 0.0472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3559 \\ 0.1065 \end{bmatrix} = 0.00268062$$

Si prosegue con il calcolo di $\sum_{k=t-i^*}^{J-1} \frac{\hat{s}_{i^*,k+1}^2}{\hat{\mu}_{t-k,k+1}} = \frac{0.3559^2}{174.08} + \frac{0.1065^2}{75.68} = 0.00087760$. Per quanto riguarda il calcolo di $\sum_{j=0}^J e^{\hat{c} + \hat{a}_j + \hat{b}_j}$, si tratta di sommare i pagati *fitted* dell'intera generazione $i^* = 3$, ovvero la terza riga della tabella 7.

In conclusione si ha:

$$\widehat{MSEP}(CDR_{3,4+1}) = 589.12^2 \cdot (1.6022 \cdot 0.00087760 + 0.00268062) = 1418.34$$

ed in termini relativi rispetto alla riserva sinistri:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\widehat{MSEP}}}{\hat{R}_3^{(t)}} = \frac{\sqrt{1418.34}}{274.12} = 0.1374 = 13.74\%$$

k	$\hat{r}_{k+1}^{(t)}$
0	$\hat{r}_3^{(4)}$ 0.7914
1	$\hat{r}_2^{(4)}$ 0.3559
2	$\hat{r}_1^{(4)}$ 0.1698

Tabella 14: Stime di r_{k+1}

$\hat{S}_{(2)}$	$\hat{S}_{(3)}$	$\hat{S}_{(4)}$	$\hat{S}_{(2)}$	$\hat{S}_{(3)}$	$\hat{S}_{(4)}$
\hat{r}_1	\hat{r}_2	\hat{r}_3	0.1098	0.3559	0.7914
	$\hat{r}_1\alpha_2^{(4)}$	$\hat{r}_2\alpha_1^{(4)}$		0.1065	0.1013
		$\hat{r}_1\alpha_2^{(4)}$			0.1065

Tabella 15: Stime di s_{j^*}

i^*	$R_{i^*}^{(4)}$	$[\widehat{MSEP}(CDR_{i^*,4+1})]^{1/2}$	$\sigma\%$
1	0.00	0.00	-
2	75.68	19.79	26.15%
3	274.12	37.66	13.74%
4	597.31	110.69	18.53%
Tot	947.11	131.36	13.87%

Tabella 16: Stima dell'MSEP

i	j	$X_{3,(t+1)}$						
		Int.	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
3	2	1	0	1	0	0	1	0
2	3	1	1	0	0	0	0	1

Tabella 17: Matrice $X_{3,(t+1)}$ (*hat matrix*)

6 Applicazione numerica

In questa sezione viene presentata una applicazione numerica che mette a confronto il metodo con formula chiusa (*closed tool*, CT), proposto nel presente quaderno, con la nota metodologia di *bootstrapping* (BS), con *re-reserving*, i cui risultati si ottengono mediante simulazione *Monte Carlo*. Il triangolo utilizzato per il confronto è quello rappresentato in tabella 18; si tratta dei pagamenti del segmento *third party liability* di una compagnia italiana (per ovvie ragioni di riservatezza i dati sono stati edulcorati).

Le elaborazioni sono state effettuate utilizzando il software R, per quanto riguarda la metodologia *bootstrap* si è utilizzata la libreria *ChainLadder* ed i risultati riportati nelle tabelle 20 e 21 sono stati

ottenuti eseguendo il codice 1. La stima dei parametri del modello GLM è stata utilizzata la libreria `stats` e le stime $\hat{\beta}$, $\widehat{Var}(\hat{\beta})$ e $\hat{\phi}$ sono state ottenute eseguendo il codice 2.

In tabella 19 è riportata la stima dei parametri ed il relativo standard error ottenuti applicando la quasi-verosimiglianza (3.6), mentre applicando la (3.3) si ottiene $\hat{\phi} = 410.8964$. Nelle tabelle 22 e 23, sono riportati i valori di $\hat{\alpha}_k$, \hat{q}_{k+1} , $\hat{\mu}_{t-k,k+1}$, \hat{r}_{k+1} e \hat{S}_j^* , ottenuti a partire dai risultati del modello GLM e necessari per l'applicazione delle formule (5.21) e (5.33) relative alla stima dell'MSEP del CDR *one year* in formula chiusa, riportati nella colonna CT della tabella (21). Come si evince dai risultati in tabella (21) le formule proposte per la stima dell'MSEP producono risultati analoghi a quelli calcolati con tecniche simulative (*re-reserving*), tenendo presente che quest'ultimi incorporano l'errore di simulazione.

i / j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	22,603	39,938	35,073	25,549	20,031	17,593	14,930	15,004	10,319	8,240	8,104	6,020	19,145
2	22,382	41,502	26,508	19,734	18,715	13,983	12,885	16,371	7,921	7,204	4,428	12,897	
3	25,355	45,707	33,062	24,232	16,765	13,180	11,639	8,864	9,994	6,044	3,954		
4	26,830	52,347	37,324	23,590	18,248	13,895	13,142	11,119	9,429	5,057			
5	26,868	62,313	33,772	22,925	16,341	12,419	12,646	9,459	6,658				
6	28,470	56,097	41,672	24,843	22,818	18,787	16,947	14,942					
7	26,170	55,362	39,026	26,817	22,881	19,663	19,395						
8	24,101	58,520	38,749	22,449	16,008	12,506							
9	22,714	48,707	28,970	18,798	13,369								
10	19,973	38,262	23,298	14,819									
11	17,252	36,994	24,361										
12	17,591	30,074											
13	16,907												

Tabella 18: Triangolo dei Pagamenti incrementali (,000)

Codice 1: Bootstrap

```

1 library(ChainLadder)
2 set.seed(15870)
3 BS <- BootChainLadder(Triangolo.Cumulato, R=100000, process.distr=c("od.pois"))
4 CDR(BS)

```

Codice 2: GLM

```

1 library(stats)
2 claims <- as.vector(Triangolo.Incrementale)
3 n.origin <- nrow(Triangolo.Incrementale)
4 n.dev <- ncol(Triangolo.Incrementale)
5 origin <- factor(row <- rep(1:n.origin, n.dev))
6 dev <- factor(col <- rep(1:n.dev, each=n.origin))
7 W <- data.frame(claims=claims, origin=origin, dev=dev)
8 model <- glm(claims ~ origin + dev, family = quasipoisson(), subset=!is.na(claims),
9             data=W)
9 Model.Summary<-summary(model)
10 Model.Summary$coefficients #$ stima del predittore lineare \beta
11 Model.Summary$cov.scaled #$ matrice di varianza-covarianza Var(\beta)
12 Model.Summary$dispersion #$ parametro di dispersione \phi

```

Parametro	Stima	Std. Error	Parametro	Stima	Std. Error
\hat{c}	10.1263	0.0572			
\hat{a}_2	-0.0883	0.0620	\hat{b}_1	0.7024	0.0468
\hat{a}_3	-0.0715	0.0629	\hat{b}_2	0.3132	0.0513
\hat{a}_4	0.0155	0.0620	\hat{b}_3	-0.0972	0.0579
\hat{a}_5	0.0126	0.0628	\hat{b}_4	-0.3241	0.0635
\hat{a}_6	0.1579	0.0614	\hat{b}_5	-0.5254	0.0703
\hat{a}_7	0.1551	0.0627	\hat{b}_6	-0.5737	0.0753
\hat{a}_8	0.0425	0.0662	\hat{b}_7	-0.6904	0.0843
\hat{a}_9	-0.1261	0.0716	\hat{b}_8	-1.0112	0.1051
\hat{a}_{10}	-0.3171	0.0795	\hat{b}_9	-1.2910	0.1317
\hat{a}_{11}	-0.3326	0.0858	\hat{b}_{10}	-1.4622	0.1643
\hat{a}_{12}	-0.4592	0.1044	\hat{b}_{11}	-0.9285	0.1553
\hat{a}_{13}	-0.3909	0.1660	\hat{b}_{12}	-0.2665	0.1573

Tabella 19: Stima parametri GLM

a.y.	\hat{R}_i		$\Delta\%$	$r\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)$		$\Delta\%$
	BS	CT		BS	CT	
1	0	0	0	0	-	-
2	17,573	17,528	-0.26%	3,888	3,870	-0.46%
3	27,068	27,018	-0.18%	4,724	4,720	-0.08%
4	35,429	35,356	-0.21%	5,448	5,442	-0.11%
5	42,295	42,212	-0.20%	5,898	5,880	-0.31%
6	59,560	59,463	-0.16%	7,118	7,123	0.07%
7	74,021	73,930	-0.12%	7,920	7,926	0.08%
8	80,879	80,752	-0.16%	8,252	8,234	-0.22%
9	81,354	81,245	-0.13%	8,293	8,295	0.02%
10	80,401	80,285	-0.14%	8,472	8,483	0.13%
11	95,412	95,309	-0.11%	9,989	9,988	-0.01%
12	105,715	105,579	-0.13%	12,443	12,386	-0.46%
13	147,336	147,172	-0.11%	25,149	25,085	-0.25%
Tot	847,041	845,851	-0.14%	52,813	52,714	-0.19%

Tabella 20: MSEP *ultimate*

a.y.	$r\widehat{MSEP}(CDR_{i^*,t+1})$		$\Delta\%$	$\sigma\%$		Δ	$\frac{r\widehat{MSEP}(CDR_{i^*,t+1})}{r\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)}$	
	BS	CT		BS	CT		BS	CT
1	0	0	-	-	-	-	-	-
2	3,888	3,870	-0.46%	22.12%	22.08%	-0.04%	100.00%	100.00%
3	3,238	3,234	-0.12%	11.96%	11.97%	0.01%	68.54%	68.52%
4	3,083	3,073	-0.32%	8.70%	8.69%	-0.01%	56.59%	56.47%
5	3,242	3,233	-0.28%	7.67%	7.66%	-0.01%	54.97%	54.98%
6	3,980	3,969	-0.28%	6.68%	6.67%	-0.01%	55.91%	55.72%
7	4,477	4,473	-0.09%	6.05%	6.05%	0.00%	56.53%	56.43%
8	4,494	4,490	-0.09%	5.56%	5.56%	0.00%	54.46%	54.53%
9	4,319	4,333	0.32%	5.31%	5.33%	0.02%	52.08%	52.24%
10	4,535	4,538	0.07%	5.64%	5.65%	0.01%	53.53%	53.50%
11	5,705	5,691	-0.25%	5.98%	5.97%	-0.01%	57.11%	56.98%
12	8,364	8,341	-0.27%	7.91%	7.90%	-0.01%	67.22%	67.34%
13	21,651	21,616	-0.16%	14.69%	14.69%	0.00%	86.09%	86.17%
Tot	38,603	38,578	-0.06%	4.56%	4.56%	0.00%	73.09%	73.18%

Tabella 21: MSEP *one year*

7 Conclusioni

In questo lavoro, dopo una breve rassegna sulla volatilità della stima della riserva sinistri nell'ambito dei GLM, misurata in termini di *ultimate view*, sono state ricavate le formule per il calcolo della volatilità *one year* dello specifico modello ODP. Tuttavia, mentre la prima misura (*ultimate*) è ottenuta sulla base di assunzioni generali d'indipendenza dei pagamenti incrementali, il secondo tipo di volatilità (*one*

k	$13 - k$	$\hat{\alpha}_k^{(13)}$	\hat{q}_{k+1}	$\hat{\mu}_{t-k,k+1}$	$\hat{r}_{k+1}^{(13)}$
0	13	0.0569	0.0415	34127.94	0.0789
1	12	0.0563	0.0192	21598.78	0.0442
2	11	0.0677	0.0127	16260.70	0.0271
3	10	0.0738	0.0097	13162.94	0.0331
4	9	0.0965	0.0094	13026.95	0.0453
5	8	0.1264	0.0108	14693.99	0.0653
6	7	0.1619	0.0115	14633.21	0.0786
7	6	0.1937	0.0096	10647.17	0.0895
8	5	0.2077	0.0075	6959.96	0.1202
9	4	0.2630	0.0078	5882.08	0.1714
10	3	0.3271	0.0158	9194.30	0.3118
11	2	0.4779	0.0412	17527.56	0.6687

Tabella 22: Stime di α , q e μ

\hat{s}_2	\hat{s}_3	\hat{s}_4	\hat{s}_5	\hat{s}_6	\hat{s}_7	\hat{s}_8	\hat{s}_9	\hat{s}_{10}	\hat{s}_{11}	\hat{s}_{12}	\hat{s}_{13}
0.0789	0.0442	0.0271	0.0331	0.0453	0.0653	0.0786	0.0895	0.1202	0.1714	0.3118	0.6687
	0.0377	0.0145	0.0071	0.0069	0.0088	0.0106	0.0099	0.0086	0.0089	0.0116	0.0176
		0.0377	0.0145	0.0071	0.0069	0.0088	0.0106	0.0099	0.0086	0.0089	0.0116
			0.0377	0.0145	0.0071	0.0069	0.0088	0.0106	0.0099	0.0086	0.0089
				0.0377	0.0145	0.0071	0.0069	0.0088	0.0106	0.0099	0.0086
					0.0377	0.0145	0.0071	0.0069	0.0088	0.0106	0.0099
						0.0377	0.0145	0.0071	0.0069	0.0088	0.0106
							0.0377	0.0145	0.0071	0.0069	0.0088
								0.0377	0.0145	0.0071	0.0069
									0.0377	0.0145	0.0071
										0.0377	0.0145
											0.0377

Tabella 23: Stime di $s_{(j^*)}$

year) si ottiene attraverso l'utilizzo della stima dei pagati cumulati del *chain ladder*. Ne consegue che la volatilità *one year* di una determinata generazione viene calcolata anche in funzione delle stime di quelle precedenti (analogamente al modello di Merz-Wüthrich).

In generale quindi tali formule possono potenzialmente costituire una valida alternativa alle formule di Merz-Wüthrich in termini di parametri di volatilità (*undertaking specific parameters*, USP) per il calcolo del *Solvency Capital Requirement* secondo il *framework* Solvency 2. Inoltre, tali risultati, potrebbero essere utilizzati per risolvere il problema delle distorsioni indotte da approcci quali ad esempio l'*emergence pattern*, introdotto da P. England, in relazione alla singola generazione. Tale approccio è stato sviluppato soprattutto per ovviare ai casi in cui il *bootstrapping* non risulta appropriato ad esempio per questioni di stabilità dei triangoli o per motivi computazionali legati al *re-reserving*. L'*emergence*

pattern, in sintesi, si basa sull'assunto che la volatilità a livello *ultimate* emerga gradualmente nel tempo, cosicchè se si può determinare una stima della volatilità totale, si possono anche creare meccanismi che consentano di farla emergere utilizzando un determinato *pattern*. In tal caso si assume che il CDR sia una funzione della *best estimate* e, di conseguenza, la *standard deviation* del CDR viene stimata tramite questa relazione, valutando un fattore per ciascuna generazione osservata. In pratica il problema della calibrazione viene affrontato costruendo i fattori sulla base dei rapporti tra la *standard deviation* del CDR e la *standard deviation* del costo ultimo per ciascuna generazione (seguite da opportune perequazioni per calibrare un *pattern* unico applicabile a ciascuna generazione). La distorsione può evidenziarsi infatti quando le volatilità *ultimate view* sono ottenute con l'ODP, in formula chiusa o con tecnica *bootstrapping*, ma vengono poi ripartite nel tempo utilizzando fattori desunti dai rapporti tra le formule di Merz-Wüthrich e quelle di Mack, quindi derivate da un altro modello. I risultati del quaderno renderanno più coerenti tali approcci tipici della prassi odierna nella costruzione dei modelli interni.

Riferimenti bibliografici

- [1] Antonio K., Beirlant J. (2008), *Issues in claims reserving and credibility: a semiparametric approach with mixed models*. Journal of Risk and Insurance, 75(3), 643-676.
- [2] Bjökwall S., Hössjer O., Ohlsson E., Verrall R. (2011), *A generalized linear model with smoothing effects for claims reserving*. Insurance: Mathematics and Economics, Volume 49, Issue 1, 27-37.
- [3] Despeyroux A., Levi C., Partrat C., Vignancour J. (2003), *Techniques for valuation a general insurance company within the framework of IAS standards: some proposals*. Proceedings of the XXXIV ASTIN Colloquium, Berlin.
- [4] England P.D., Verrall R.J. (2001), *A flexible framework for stochastic claims reserving*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, LXXXVIII, 1-38.
- [5] England P.D., Verrall R.J. (2002), *Stochastic claim reserving in general insurance*. British Actuarial Journal, 8, n. 3, 443-544.
- [6] England P.D., Verrall R.J. (2006), *Predictive Distributions of Outstanding Liabilities in General Insurance*. Annals of Actuarial Science, Volume 1, Issue 2, September 2006, pp. 221-270
- [7] Gigante P., Sigalotti L (2004), *Valutazione della riserva sinistri con i GLM nel contesto dei nuovi standard contabili*. Quaderni del Dipartimento di Matematica Applicata alle Scienze Economiche Statistiche e Attuariali "B. de Finetti", n.6/2004
- [8] Jorgensen B.(1997), *The theory of dispersion models*. Chapman and Hall, New York.
- [9] Jorgensen B., De Souza M.C. (1994), *Fitting Tweedie's compound Poisson model to insurance claims data*. Scandinavian Actuarial Journal, 69-93.
- [10] Leong G., Wang S., Chen H. (2014), *Back-Testing the ODP Bootstrap of the Paid Chain-Ladder Model with Actual Historical Claims Data* Variance 8:2, 2014, pp. 182-202.

- [11] McCullagh P., Nelder J.A. (1983), *Generalized Linear Models* Chapman and Hall
- [12] Merz and Wüthrich (2008), *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*. Wiley Finance.
- [13] Merz and Wüthrich (2015), *Stochastic Claims Reserving Manual: Advances in Dynamic Modeling*. SSRN Manuscript 2649057.
- [14] Nelder J.A., Pregibon D. (1987), *An extended quasi-likelihood function*. Biometrika, 74, 221-232.
- [15] Nelder J.A., Lee Y. (1992), *Likelihood, quasi-likelihood and pseudolikelihood: some comparisons*. Journal of the Royal Statistical Society, B, 54, 273-284.
- [16] Hudecovà S., Pešta M (2013), *Modeling Dependencies in Claims Reserving with GEE*. Insurance: Mathematics and Economics, vol. 53(3), pp. 786-794.
- [17] Renshaw A.E., Verrall R.J. (1998), *A stochastic model underlying the chain-ladder technique*. British Actuarial Journal, 4, 903-923.
- [18] Röhr A. (2016), *Chain Ladder and Error Propagation* ASTIN Bulletin, 46, 1-38.
- [19] Taylor G.C., McGuire G. (2004), *Loss reserving with GLMs: a case study*. Research paper, 113, Centre for Actuarial Studies, University of Melbourn, Australia. Institute of Actuaries, 118, 489-499.
- [20] Taylor G.C., McGuire G. (2016), *Stochastic Loss Reserving Using Generalized Linear Models*. CAS Monograph No. 3.
- [21] Taylor G.C., Xu J. (2016), *An Empirical Investigation of the Value of Finalization Count Information to Loss Reserving*. Variance in press.
- [22] Venter G. (2007), *Generalized Linear Models beyond the Exponential Family with Loss Reserve Applications*. ASTIN Bulletin, 37, 345-364.
- [23] Verrall R. (1991), *Chain ladder and maximum likelihood*. Journal of the Institute of Actuaries, 118, 489-499.

- [24] Wedderburn R.W.M. (1974), *Quasi-likelihood functions, generalized linear models, and the Gauss-Newton method*. *Biometrika*, 61, 3, 439-447

